CORRECTION CONTRÔLE 10

Exercice 1 :

1. Indiquons les valeurs de $f(0)$ et de $f(2)$:
   On a: $f(0) = 2$ et $f(2) = 0$

2. Indiquons les valeurs de $f'(0)$ et $f'(1)$ en justifiant:
   $f'(0) = 1$ car $f'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 0.
   $f'(1) = 0$ car la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 1 est une droite horizontale (parallèle à l'axe des abscisses).

3. Donnons une équation de la tangente à la courbe C_f au point A en justifiant.
   $(T) : y = x + 2$ est l'équation de la tangente à la courbe C_f au point A car l'équation de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse 0 est donnée par: $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$ or $f(0) = 2$ et $f'(0) = 1$.
   D'où $(T) : y = x + 2$ est bien l'équation de la tangente à la courbe de C_f

Exercice 2 :

Soit la fonction g définie sur $]2; +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1}{x-2}$

1. Calculons le taux de variation de la fonction g entre 3 et $3+h$ et montrons qu'il est égal à $\dfrac{-1}{1+h}$

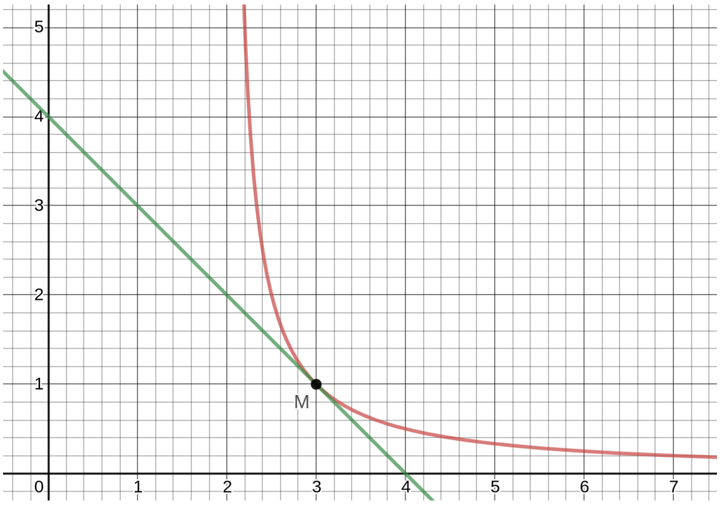
$$
\begin{aligned}
\tau(h) &= \frac{g(3+h) - g(3)}{3+h-3} \\
&= \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} \quad \text{car} \quad g(3+h) = \frac{1}{1+h} \quad \text{et} \quad g(3) = 1 \\
&= \frac{\frac{1-(1+h)}{1+h}}{h} \\
&= \frac{-h}{h(1+h)} \\
\tau(h) &= -\frac{1}{1+h}
\end{aligned}
$$

D'où le résultat.

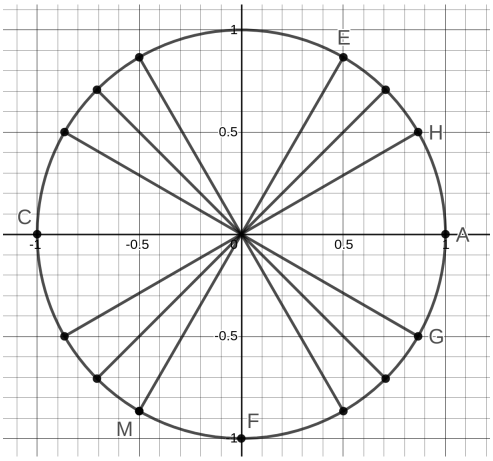
2. Déduisons la valeur de $g'(3)$
   $g'(3) = \lim\limits_{h \to 0} \tau(h) = \lim\limits_{h \to 0} \left(-\dfrac{1}{1+h}\right) = -1$
   D'où $g'(3) = -1$

3. Déterminons par le calcul l'équation de la tangente au point M d'abscisse 3.
   La tangente au point M d'abscisse 3 est la droite passant par le point $M(3, g(3))$ et de coefficient directeur $g'(3) = -1$.
   On a: $g(3) = \dfrac{1}{3-2} = 1$
   Soit (T) : $y = ax + b$ une équation réduite de la tangente.
   $a = g'(3) = -1$ donc (T) : $y = -x + b$ de plus (T) passe par le point $M(3, 1)$ donc $y_M = -x_M + b \iff 1 = -3 + b \iff b = 4$
   D'où (T) : $y = -x + 4$ est l'équation de la tangente au point M.

4. Traçons sur la figure la tangente au point M. (sauf PAP)



Exercice 3 :



1. En prenant le point A pour origine, déterminons pour les points C et M deux réels qui leur sont associés.
   On peut associer les réels π et $-\pi$ au point C et les réels $\pi + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{4\pi}{3}$ et $-\dfrac{2\pi}{3}$ au point M
2. Plaçons les points E, F, G et H repérés respectivement par les réels: $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{-\pi}{2}$, $\dfrac{7\pi}{4}$ et $\dfrac{13\pi}{6}$ sur le cercle trigonométrique ci-contre:

   - E : $\dfrac{\pi}{3}$
     Trivial
   - F: $\dfrac{-\pi}{2}$
     Trivial

Cont.

- G: $\frac{7\pi}{4}$
  $\frac{7\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = 2\pi - \frac{\pi}{4}$
  Donc la position de G peut être repérée par le réel $-\frac{\pi}{4}$
- H: $\frac{13\pi}{6}$
  $\frac{13\pi}{6} = \frac{12\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = 2\pi + \frac{\pi}{6}$
  Donc la position de H peut être repérée par le réel $\frac{\pi}{6}$

Exercice 4 :

1. (a) Donnons les valeurs exactes de:
   - $\cos(\frac{\pi}{6})$
     $\cos(\frac{\pi}{6}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   - $\sin(-\frac{\pi}{6})$
     $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

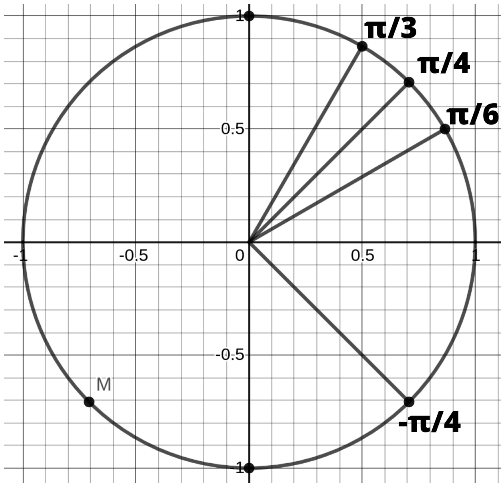
   (b) Trouvons les valeurs exactes des cosinus et sinus des nombre suivants (Voir le cercle trigonométrique ci-dessous pour le réels utiles utilisés)

   - $\sin\frac{7\pi}{3}$
     On a : $\frac{7\pi}{3} = \frac{6\pi}{3} + \frac{\pi}{3} = 2\pi + \frac{\pi}{3}$
     Donc $\sin(\frac{7\pi}{3}) = \sin(2\pi + \frac{\pi}{3}) = \sin\frac{\pi}{3}$ car pour tout réel x, $\sin(2\pi + x) = \sin(x)$
     Or $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$
     D'où $\sin(\frac{7\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$
   - $\cos\frac{3\pi}{4}$
     On a : $\frac{3\pi}{4} = \frac{4\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{\pi}{4}$
     Donc $\cos(\frac{3\pi}{4}) = \cos(\pi - \frac{\pi}{4}) = -\cos\frac{\pi}{4}$ car pour tout réel x, $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$.
     Or $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
     D'où $\cos(\frac{3\pi}{4}) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
   - $\sin(-\frac{\pi}{6})$
     On a : $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\sin\frac{\pi}{6}$ car pour tout réel x, $\sin(-x) = -\sin(x)$
     Or $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$
     D'où $\sin(-\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

Cont.

2. Plaçons le point M associé au réel $\dfrac{5\pi}{4}$ sur un cercle trigonométrique:

   On a : $\dfrac{5\pi}{4} = \dfrac{4\pi}{4} + \dfrac{\pi}{4} = \pi + \dfrac{\pi}{4}$



   Déterminons les coordonnées du point M dans le repère $(0, I, J)$.

   Il s'agit de déterminer $\sin(\dfrac{5\pi}{4})$ et $\cos(\dfrac{5\pi}{4})$.

   On a : $\sin(\dfrac{5\pi}{4}) = \sin(\pi + \dfrac{\pi}{4}) = -\sin\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   et $\cos(\dfrac{5\pi}{4}) = \cos(\pi + \dfrac{\pi}{4}) = -\cos(\dfrac{\pi}{4}) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

   D'où $M\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Exercice 5 :

1. Convertissons en degrés les mesures d'angles suivantes données en radians:
   - $\dfrac{\pi}{8}$

     On sait que πrad correspond à un angle de 180° donc $\dfrac{\pi}{8}$rad correspond à un angle de $\dfrac{180°}{8} = 22,5°$.

     D'où $\dfrac{\pi}{8}$rad vaut $22,5°$
   - $\dfrac{3\pi}{5}$

     On sait que πrad correspond à un angle de 180° donc $\dfrac{3\pi}{5}$rad correspond à un angle de $\dfrac{3 \times 180°}{5} = 108°$

     D'où $\dfrac{3\pi}{5}$rad vaut 108°
2. Convertissons en radians les mesures d'angles suivantes données en degré:

Cont.

- $18°$
  On sait que $180°$ correspond à un angle de πrad donc:
  $18° = \frac{180°}{10}$ correspond à $\frac{\pi}{10}$
  D'où $18°$ vaut $\frac{\pi}{10}$ radian.
- $140°$.
  Soit α la mesure de l'angle en radian correspondant à $140°$.
  On sait que:

$$180° \longrightarrow \pi$$
$$140° \longrightarrow \alpha$$

  Donc $\alpha = \frac{140° \times \pi}{180°} = \frac{7\pi}{9}$
  D'où $140°$ vaut $\frac{7\pi}{9}$ radian.

Exercice 6 :

On considère la fonction $f(x) = \sqrt{(x)}$ définie sur $[0; +\infty[$.

1. Complétons la démonstration ci-dessous:
   Soit h un réel positif pour étudier la dérivabilité de f en O, on détermine le taux de variation entre 0 et 0+h
   $\tau(h) = \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{0+h} - 0}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{(h)}}$
   $\frac{1}{\sqrt{(h)}}$ *tend vers* $+\infty$ *quand h tend vers 0.*

2. Vérifions si la fonction est dérivable en 0.
   De ce qui précède on : $\tau(h) = \frac{1}{\sqrt{(h)}}$ or $\lim_{h \to 0} \tau(h) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{(h)}} = +\infty$.
   D'où la fonction f n'est pas dérivable en 0.

The End.