Correction Contrôle 1

Exercice 1 :

1. Déterminons une équation cartésienne de la droite d_1 passant par le point $A(-2;5)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$
   Soit $d_1 : ax+by+c=0$ où $a,b,c \in \mathbb{R}$.
   On a : $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}5\\-6\end{pmatrix}$ qui est un vecteur directeur de d_1 donc $d_1 : -6x-5y+c=0$
   $A \in d_1$ alors $-6x_A-5y_A+c=0 \Leftrightarrow 6\times(-2)+5\times 5+c=0$ d'où $c=13$.
   Par conséquent; $d_1 : -6x-5y+13=0$ ou $d_1 : 6x+5y-13=0$

2. Déterminons le coefficient directeur de la droite d_1
   On a: $d_1 : 6x+5y-13=0$

$$\begin{aligned} 6x+5y-13=0 &\Leftrightarrow 5y=-6x+13 \\ &\Leftrightarrow y=\frac{-6}{5}x+\frac{13}{5} \end{aligned}$$

   $y=\dfrac{-6}{5}x+\dfrac{13}{5}$ est une équation réduite de d_1 donc le coefficient directeur de la droite d_1 est $\dfrac{-6}{5}$

3. Équation cartésienne de la droite d_2 passant pas les points $B(-5;2)$ et $C(5;4)$
   Soit $M(x,y)$ un point de la droite d_2.
   Le vecteur $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur directeur de la droite d_2 et est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{BM}$.
   On a : $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}10\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x+5\\y-2\end{pmatrix}$
   $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BM}$ sont colinéaires donc $\det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC})=0$.

$$\begin{aligned} \det(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC})=0 &\Leftrightarrow 2(x+5)-10(y-2)=0 \\ &\Leftrightarrow 2x-10y+30=0 \end{aligned}$$

   D'où $d_2 : 2x-10y+30=0$

4. Déterminons l'équation réduite de la droite d_2.
   On a de ce qui précède, $d_2 : 2x - 10y + 30 = 0$
$$\begin{aligned} 2x - 10y + 30 = 0 &\Leftrightarrow 10y = 2x + 30 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{1}{5}x + 3 \end{aligned}$$
   D'où $y = \frac{1}{5}x + 3$ est l'équation réduite de la droite d_2

5. Montrons que les droites d_1 et d_2 sont sécantes:
   On a : $d_1 : y = \frac{-6}{5}x + \frac{13}{5}$ et $d_2 : y = \frac{1}{5}x + 3$
   Le coefficient directeur de d_1 est $-\frac{-6}{5}$ qui est différent du coefficient directeur de d_2 qui est $\frac{1}{5}$; d'où les droites d_1 et d_2 sont sécantes
   Calculons les coordonnées de leur point d'intersection.
   Soit $I(x, y)$ le point d'intersection des droites d_1 et d_2. Les coordonnées de I sont solution du système d'équations: $\begin{cases} 6x + \ \ 5y - 13 = 0 \ L_1 \\ 2x - 10y + 30 = 0 \ L_2 \end{cases}$
   De L_2 on a: $y = \frac{1}{5}x + 3$ et remplaçant y dans L_1 on obtient: $6x + 5\left(\frac{1}{5}x + 3\right) - 13 = 0 \Leftrightarrow 7x + 2 = 0$ donc $x = \frac{-2}{7}$.
   On obtient par suite $y = \frac{1}{5} \times \frac{-2}{7} + 3$ donc $y = \frac{103}{35}$.
   D'où $I\left(\frac{-2}{7}, \frac{103}{35}\right)$

Exercice 2 :

Soient d la droite passant par le point $A(0; -3)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$ et le point $M(x; y)$ tel que $M \in d$.

1. Montrons que $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}) = -2x + 5y + 15$.
   On a: $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y+3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -5 \\ -2 \end{pmatrix}$
   $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}) = -2x + 5(y + 3)$
   D'où $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}) = -2x + 5y + 15$.

2. Déduisons une équation cartésienne de d.
   La droite d passe par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ alors pour tout $M(x, y) \in d$; $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}) = 0$
   Or de la question précédente, $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{v}) = -2x + 5y + 15$
   On en déduit alors que; $d : -2x + 5y + 15 = 0$

3. Vérifions si le point $B(3; -2)$ appartient à la droite d.
   Si $B \in d$ alors $-2x_B + 5y_B + 15 = 0$
   Calculons $-2x_B + 5y_B + 15$
   $-2x_B + 5y_B + 15 = -2 \times 3 + 5(-2) + 15 = -1 \neq 0$
   $-2x_B + 5y_B + 15 \neq 0$ d'où le point B n'appartient pas à d.

Cont.

4. Calculons les coordonnées du point d'intersection de d et de l'axe des ordonnées.
   L'équation de l'axe des ordonnées est: $x = 0$
   Les coordonnées du point d'intersection de d et de l'axe des ordonnées est le couple solution du système: $\begin{cases} x = 0 & L_1 \\ -2x + 5y + 15 = 0 & L_2 \end{cases}$
   Par substitution de L_1 dans L_2 on obtient: $5y + 15 = 0$ donc $y = -3$
   D'où le point d'intersection de d et de l'axe des ordonnées est le point de coordonnées $(0, -3)$.

Exercice 3 :

Soint la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + x + 2$

1. Résolvons l'équation $f(x) = 0$.
   $f(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 0$
   Soit Δ le discriminant de cette équation.

$$\Delta = 1^2 - 4(-1)(2) = 9$$
$$\Delta = 3^2$$

   $\Delta > 0$ donc l'équation a deux solutions réelles distinctes:

$$x_1 = \frac{-1-3}{-2} = 2 \text{ et } x_2 = \frac{-1+3}{-2} = -1$$

   D'où l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes: $x_1 = 2$ et $x_2 = -1$

2. Résolvons l'équation $f(x) = 3$.

$$\begin{aligned} f(x) = 3 &\Leftrightarrow -x^2 + x + 2 = 3 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + x - 1 = 0 \end{aligned}$$

   Soit Δ le discriminant de cette équation.

$$\Delta = 1^2 - 4(-1)(-1)$$
$$\Delta = -3$$

   $\Delta < 0$ donc l'équation n'admet pas de solutions réelles.
   D'où l'équation $f(x) = 3$ n'admet pas de solutions réelles.

Exercice 4 :

1. Associons à chacune des donctions f et g la courbe représentative correspondante en justifiant.
   Sur la représentation, la courbe C_1 passe par le point $O(0, 0)$.
   On a : $f(0) = (0 + 1)^2 - 1 = 0$ et $g(0) = -2(0)^2 - 3 \times 0 + 2 = 2$.
   Ainsi, la courbe C_1 est la courbe représentative de la fonction f et par conséquent la courbe C_2 est celle de la fonction g.

2. Déterminons par le calcul la forme canonique de $g(x)$.
   La forme canonique de $g(x) = -2x^2 + 3x + 2$ est sous la forme de: $a(x - \alpha)^2 + \beta$ où

$\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$ avec $a = -2$, $b = 3$ et $c = 2$.
Calculons α et β:
$\alpha = -\dfrac{3}{2(-2)} = \dfrac{3}{4}$

$$\begin{aligned}\beta &= f(\frac{3}{4})\\ &= -2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 3 \times \frac{3}{4} + 2\\ &= \frac{25}{8}\end{aligned}$$

D'où $g(x) = -2\left(x - \dfrac{3}{4}\right)^2 + \dfrac{25}{8}$

3. (a) Montrons que calculer les coordonnées des points d'intersection des courbes C_1 et C_2 revient à résoudre l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$.
Il y a intersection des courbes C_1 et C_2 lorsque $f(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned}f(x) = g(x) &\Leftrightarrow (x+1)^2 - 1 = -2x^2 - 3x + 2\\ &\Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 - 1 + 2x^2 + 3x - 2 = 0\\ &\Leftrightarrow 3x^2 + 5x - 2 = 0\end{aligned}$$

D'où le résultat

(b) Déduisons les coordonnées des points d'intersection de C_1 et C_2.
Pour cela résolvons l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$
Soit Δ le discriminant de cette équation.

$$\begin{aligned}\Delta &= 5^2 - 4(3)(-2) = 49\\ \Delta &= 7^2\end{aligned}$$

$\Delta > 0$ alors l'équation a deux solutions réelles distinctes:

$$x_1 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-5-7}{6} = -2$$

Ainsi, l'équation $3x^2 + 5x - 2 = 0$ a deux solutions réelles distinctes : $x_1 = \dfrac{1}{3}$ et $x_2 = -2$.
Par suite: $f(x_1) = f(\dfrac{1}{3}) = \dfrac{7}{9}$ et $f(x_2) = f(-2) = 0$.
D'où les points d'intersections de C_1 et C_2 sont les points de coordonnées:$(-2, 0)$ et $\left(\dfrac{1}{3}, \dfrac{7}{9}\right)$

The End.