Correction Contrôle 3

Exercice 1 :

Disons pour chacune des affirmations suivantes si elle est vraie ou fausse et justifions la réponse:

- Il existe au moins un réel m tel que les vecteurs $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}-1\\m+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix}2m\\m\end{pmatrix}$ soient colinéaires.
  Supposons que les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires, alors il existe une constante k tel que: $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$

$$\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v} \iff (S)\begin{cases}-1 = 2km \ \ L_1\\ m+1 = km \ \ L_2\end{cases}$$

  Résolvons le système (S).
  De L_2 on a: $k = \dfrac{m+1}{m}$ si $m \neq 0$; k dans L_1 donne: $-1 = 2m\left(\dfrac{m+1}{m}\right)$ donc $-1 = 2m+2$; d'où $m = -\dfrac{3}{2}$. Et en remplaçant $m = -\dfrac{3}{2}$ dans $k = \dfrac{m+1}{m}$ on obtient: $k = \dfrac{1}{3}$.
  Cette affirmation est donc vraie.

- Soient $A(-2;3)$ et $B(3;1)$. Une équation cartésienne de (AB) est $2x+5y-11=0$.
  Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) et pour tout $M \in (AB)$; $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+2\\y-3\end{pmatrix}$
  $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = 0$ car $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.

$$\begin{aligned}\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) &= 5(y-3) + 2(x+2)\\ &= 2x+5y-11\end{aligned}$$

  D'où $(AB) : 2x+5y-11=0$.
  Par conséquent l'affirmation est vraie.

- Soient $A(-2;5), B(0;-7)$ et $C(2;1)$. La médiane issue de B du triangle ABC est l'axe des ordonnées.

Soit I le milieu du segment $[AC]$; $I\left(\dfrac{-2+2}{2}, \dfrac{5+1}{2}\right)$ donc $I(0,3)$.
Les points I et B sont des points de l'axe des ordonnées car leurs abscisses sont nuls (0), ainsi la droite (BI) est l'axe des ordonnées.
De plus la droite (BI) passe par le sommet B et par le milieu I du segment $[AC]$ donc (BI) est une médiane du triangle ABC.
D'où la médiane issue du sommet B du triangle ABC est l'axe des ordonnées.

Exercice 2 :

1. Repérons sur le cercle trigonométrique les points images des réels suivants et donnons pour chacun d'eux le réel de $[0; 2\pi]$ qui a la même image.

   (a) $-\dfrac{4\pi}{3}$
   On a : $-\dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{6\pi}{3} + \dfrac{2\pi}{3} = -2\pi + \dfrac{2\pi}{3}$
   Or sur le cercle trigonométrique la position du réel $\dfrac{2\pi}{3}$ est celle du point D donc le nombre réel $-\dfrac{4\pi}{3}$ est associé au point D et le réel de $[0; 2\pi]$ qui a la même image est le réel : $\dfrac{2\pi}{3}$

   (b) $\dfrac{13\pi}{2}$
   On a : $\dfrac{13\pi}{2} = \dfrac{12\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = 6\pi + \dfrac{\pi}{2} = 2 \times 3\pi + \dfrac{\pi}{2}$
   Or sur le cercle trigonométrique la position du réel $\dfrac{\pi}{2}$ est celle du point J donc le nombre réel $\dfrac{13\pi}{2}$ est associé au point J et le réel de $[0; 2\pi]$ qui a la même image est le réel : $\dfrac{\pi}{2}$

   (c) $-\dfrac{\pi}{6}$
   Le nombre réel $\dfrac{\pi}{6}$ est associé au point C sur le cercle trigonométrique or le nombre réel $-\dfrac{\pi}{6}$ est associé au point symétrique du point C par rapport à l'axe (OI) donc le point associé au nombre réel $-\dfrac{\pi}{6}$ est le point C' et le réel de $[0; 2\pi]$ qui a la même image est le réel : $\dfrac{11\pi}{6}$ car : $-\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{12\pi}{6} + \dfrac{11\pi}{6} = -2\pi + \dfrac{11\pi}{6}$

2. Vérifions si les nombres réels sont associés au même point sur le cercle trigonométrique:

   (a) $\dfrac{125\pi}{4}$ et $-\dfrac{35\pi}{4}$
   On a:

$$\begin{aligned} \frac{125\pi}{4} &= \frac{128\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \\ &= 32\pi - \frac{3\pi}{4} \\ &= 2 \times 16\pi - \frac{3\pi}{4} \end{aligned}$$

Cont.

$$\begin{aligned}\text{Et } -\frac{34\pi}{4} &= -\frac{32\pi}{4} - \frac{3\pi}{4} \\ &= -8\pi - \frac{3\pi}{4} \\ &= 2\times(-4)\pi - \frac{3\pi}{4}\end{aligned}$$

Ainsi les nombres $\frac{125\pi}{4}$ et $-\frac{35\pi}{4}$ sont associés au même point sur le cercle trigonométrique.

(b) $\frac{34\pi}{3}$ et $\frac{67\pi}{6}$

On a: $\frac{34\pi}{3} = \frac{36\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} = 12\pi - \frac{2\pi}{3} = 2\times 6\pi - \frac{2\pi}{3}$

Et $\frac{67\pi}{6} = \frac{72\pi}{6} - \frac{5\pi}{6} = 12\pi - \frac{5\pi}{6} = 2\times 6\pi - \frac{5\pi}{6}$

Or $-\frac{2\pi}{3} \neq -\frac{5\pi}{6}$ ainsi les deux nombres $\frac{34\pi}{3}$ et $\frac{67\pi}{6}$ ne sont pas associés au même point sur le cercle trigonométrique.

Exercice 3 :

1. Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $2x^2 - 3x + 1 > -x^2 + 2x - 1$.
   On a : $2x^2 - 3x + 1 > -x^2 + 2x - 1 \Longleftrightarrow 3x^2 - 5x + 2 > 0$
   Posons : $3x^2 - 5x + 2 = 0$
   Soit Δ le discriminant de cette équation.
   $\Delta = (-5)^2 - 4(3)(2) = 25 - 24 = 1 > 0$ ainsi l'équation admet deux solutions réelles distinctes:
   $$x_1 = \frac{5-1}{6} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{5+1}{6} = 1$$
   Étudions le signe de : $x \mapsto 3x^2 - 5x + 2$; pour cela faisons un tableau de signe.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		1		$+\infty$
$3x^2 - 5x + 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

   Ainsi l'ensemble solution de l'inéquation $2x^2 - 3x + 1 > -x^2 + 2x - 1$ est l'intervalle : $]-\infty, \frac{2}{3}[\cup]1, +\infty[$

2. Déduisons la position relative des courbes C_1 et C_2 représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 - 3 + 1$ et $g(x) = -x^2 + 2x - 1$

   Calculons $f(x) - g(x)$
   $f(x) - g(x) = 3x^2 - 5x + 2$ or de ce qui précède, $3x^2 - 5x + 2 > 0$ pour tout $x \in]-\infty, \frac{2}{3}[\cup]1, +\infty[$.
   On en déduit donc que pour tout $x \in]-\infty, \frac{2}{3}[\cup]1, +\infty[$; $f(x) - g(x) > 0$

Cont.

D'où la courbe C_1 de f est au dessus de la courbe C_2 de g lorsque $x \in]-\infty, \frac{2}{3}[$ et lorsque $x \in]1, +\infty[$. De plus, $3x^2 - 5x + 2 < 0$ pour tout $x \in]\frac{2}{3}, 1[$ d'où la coubre C_1 de f est en dessous de la courbe C_2 de g lorsque $x \in]\frac{2}{3}, 1[$

Exercice 4 :

Déterminons les dimensions du terrain en justifiant.
Soient x et y les nouvelles dimensions du terrain.
L'aire du nouveau terrain est de $24dam^2$ donc $xy = 24$ et le périmètre du terrain reste inchangé donc $x + y = 11$.
On obtient par suite le système suivant : $\begin{cases} xy \quad\quad = 24 \;\; L_1 \\ x + y = 11 \;\; L_2 \end{cases}$
Résolvons ce système:
De L_1 on a: $y = \frac{24}{x}$ si $x \neq 0$; en remplaçant cette valeur dans L_2 on obtient :
$x + \frac{24}{x} = 11 \iff x^2 - 11x + 24 = 0$
Résolvons l'équation $x^2 - 11x + 24 = 0$
Soit Δ le discriminant de cette équation.
$\Delta = 11^2 - 4 \times 1 \times 24 = 25 > 0$
Ainsi l'équation admet deux solutions réelles distinctes:

$$x_1 = \frac{11-5}{2} = 3 \qquad \text{et} \qquad x_2 = \frac{11+5}{2} = 8$$

En remplaçant les valeurs de x dans $y = \frac{24}{x}$ on obtient: $y_1 = \frac{24}{3} = 8$ et $y_2 = \frac{24}{8} = 3$.
Par conséquent les dimensions du nouveau terrain rectangulaire sont: $8dam$ de long sur $3dam$ de large.

Exercice 5 :

Déterminons les valeurs de m pour lesquelles l'équation $x^2 + 2(m+2)x + 6 - 2m^2 - m = 0$ d'inconnue x admet deux solutions distinctes.
Soit Δ le discriminant de cette équation.

$$\begin{aligned} \Delta &= [2(m+2)]^2 - 4(1)(6 - 2m^2 - m) \\ &= 4(m^2 + 4m + 4) - 24 + 8m^2 + 4m \\ \Delta &= 12m^2 + 20m - 8 \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions réelles distinctes si et seulement si $\Delta > 0$.
Résolvons l'inéquation $12m^2 + 20m - 8 > 0$:
$12m^2 + 20m - 8 > 0 \iff 3m^2 + 5m - 2 > 0$ résolvons donc l'inéquation $3m^2 + 5m - 2 > 0$.
Posons $3m^2 + 5m - 2 = 0$.
Soit Δ_1 le discriminant de cette équation.
$\Delta_1 = 25 - 4(3)(-2) = 49 = 7^2 > 0$ ainsi l'équation admet deux solutions réelles distinctes:
$m_1 = -2$ et $m_2 = \frac{1}{3}$

Étudions le signe de : $m \mapsto 3m^2 + 5m - 2$; pour cela faisons un tableau de signe.

m	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3m^2 + 5m - 2$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi l'ensemble solution de l'inéquation $3m^2 + 5m - 2 > 0$ est l'intervalle : $]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$.

D'où pour que l'équation $x^2 + 2(m+2)x + 6 - 2m^2 - m = 0$ admette deux solutions réelles distinctes il faut que : m appartienne à l'intervalle $]-\infty, -2[\cup]\frac{1}{3}, +\infty[$

The End.