Chapitre 8 : Trigonométrie (II)

1 Equations trigonométriques

Exercice 1 :

Résoudre l'équation $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$:

1. sur l'intervalle $[0; \pi]$;
2. sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Exercice 2 :

1. x est un nombre réel de l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ tel que $\cos(x) = \frac{1}{4}$
   (a) Calculer la valeur exacte de $\sin(x)$.
   (b) À l'aide de la calculatrice en mode radian, déterminer une valeur approchée de x au millième.
   (c) Vérifier à l'aide de la calculatrice le résultat obtenu à la question a.
2. Reprendre la question 1 pour calculer la valeur exacte de $\cos(x)$ avec x nombre réel de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin(x) = -0,4$.

Exercice 3 :

Dans chaque cas, déterminer le ou les nombres réels x vérifiant la condition donnée.

1. $\sin(x) = \frac{1}{2}$ et $x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
2. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. $\sin(x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $x \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$.
4. $\cos(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
5. $\sin(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $x \in [0; \pi]$.
6. $\cos(x) = -1$ et $x \in \left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

Exercice 4 :

Dans chaque cas, déterminer le ou les nombres réels x vérifiant la condition donnée.

1. $2\cos(x) + 1 = 0$ et $x \in [-\pi; \pi[$.
2. $1 - \sin(2x) = 0$ et $x \in [-\pi; \pi[$.
3. $\cos(x) = \sin(x)$ et $x \in [-\pi; 0[$.
4. $\sin(x) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ et $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
5. $2(\cos(x))^2 - 1 = 0$ et $x \in [-\pi; \pi[$.

Exercice 5 :

À l'aide du cercle trigonométrique, résoudre dans $]-\pi; \pi]$ les inéquations suivantes.

1. $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$
2. $\sin(x) < -\frac{1}{2}$
3. $2\cos(x) - \sqrt{2} \leq 0$

Exercice 6 :

Résoudre l'équation $\sin(3x) = \frac{1}{2}$ dans $]-\pi; \pi]$.

Exercice 7 :

1. (a) Résoudre l'équation $\frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \sqrt{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$.
   (b) Résoudre l'équation $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{3}x - \frac{1}{2} = 0$.
   (c) Résoudre l'équation $x^2 - 1 = 0$.

2. Soit a un réel. Résoudre l'équation : $\sin(a)x^2 - 2\cos(a)x - \sin(a) = 0$.

3. En quoi cette dernière équation généralise les équations de la question 1.

2 Étude des fonctions trigonométriques

Exercice 8 :

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{2}{2 + \cos x}.$$

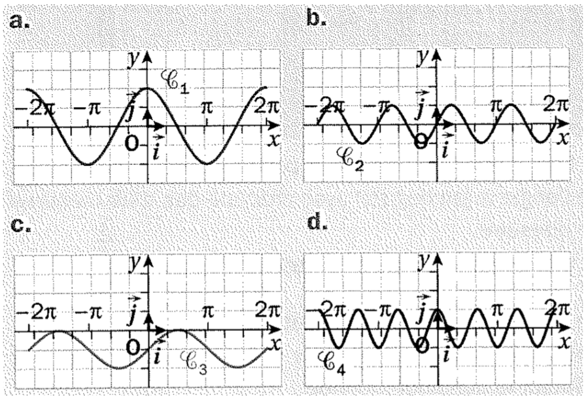
1. Déterminer l'ensemble de définition de f.

2. Montrer que la fonction f est paire.

3. Montrer que la fonction f est périodique et de période 2π.

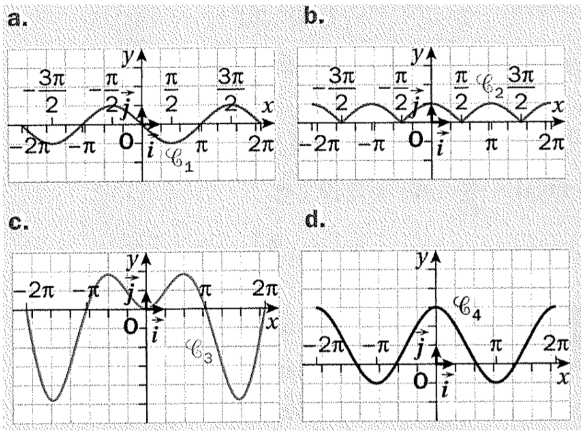
Exercice 9 :

$\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$. Dans chaque cas, émettre une conjecture quant à la parité de la fonction représentée. Justifier.



Exercice 10 :

$\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ sont les courbes représentatives des fonctions f_1, f_2, f_3 et f_4 sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$. Dans chaque cas, émettre une conjecture quant à la parité de la fonction représentée. Justifier.



Exercice 11 :

f est fonction définie sur $\mathbb{R}$.

$$f(x) = 2\cos(x) - 1.$$

1. Étudier la parité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

2. Étudier la périodicité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

3. Résoudre sur l'intervalle $[0; \pi]$ l'équation $f(x) = 0$.

4. Dans le plan muni d'un repère orthogonal (0, I, J), tracer la courbe représentative de f sur l'intervalle $[-2\pi; 2\pi]$.

Exercice 12 :

On considère la fonction défine sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(2x) + \cos(x)\sin(x).$$

1. Montrer que la focntion f est périodique et de période π.

2. Déterminer la parité de la focntion f.

Exercice 13 :

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(2x) - \cos(x).$$

1. En utilisant la calculatrice, conjecturer la période de la fonction f.

2. Démontrer le résultat précédent.

3. Déterminer la périté de la fonction f.

Exercice 14 :

1. On donne $\cos(x) = -0,8$ et $\dfrac{\pi}{2} \leq x \leq \pi$.
   Déterminer $\sin(x)$.
2. On donne $\sin(x) = \dfrac{2}{3}$ et $0 \leq x \leq \dfrac{\pi}{2}$.
   Déterminer $\cos(x)$.
3. On donne $\cos(x) = 0,6$ et $\dfrac{3\pi}{2} \leq x \leq 2\pi$.
   Déterminer $\sin(x)$.

Exercice 15 :

Exprimer à l'aide de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ les expressions suivantes.

1. $\sin(-x) + \cos(-x)$
2. $\sin(-x) - \sin(\pi + x)$
3. $\cos(\pi - x) + \cos(3\pi + x)$
4. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) - 3\cos\left(-\dfrac{\pi}{2} - x\right) - 4\sin(\pi - x)$.

Exercice 16 :

On considère la fonction f définie pour tout réel x par $f(x) = 2\cos(x) - 1$.

1. Démontrer que la fonction f est périodique. Quelle est sa période?
2. (a) À l'aide de la calculatrice, conjecturer la parité de f.
   (b) Prouver la conjecture précédente.
3. Démontrer que, pour tout réel x, $-3 \leq f(x) \leq 1$.
4. Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation $f(x) = -2$ dans l'intervalle $[0; 2\pi]$.
5. Résoudre dans l'intervalle $[0; 2\pi]$ l'équation $f(x) = -2$ et comparer avec le résultat précédent.

