Baccalauréat STI2D : Étude de suites

Exercice 1 : *France Métropole, 2013*

La plupart des lignes électriques font circuler du courant alternatif. Certaines font circuler du courant continu à très haute tension qui occasionne moins de pertes que le courant alternatif, notamment lorsque les lignes sont immergées, mais aussi lorsque les distances sont très importantes.
En 2012, la plus longue liaison électrique à courant continu en service dans le monde relie la centrale hydro-électrique de Xiangjiaba à la ville de Shanghai. Elle mesure environ 1 900 km; sa puissance électrique initiale est de 6 400 MW ; le courant est transporté sous une tension de 800 kV.

Lorsque du courant électrique circule dans un câble, une partie de la puissance électrique est perdue. On estime les pertes de puissance électrique d'un courant continu à très haute tension à 0,3 % pour une distance de 100 kilomètres.

Partie A :
On note $p_0 = 6400$. Pour tout nombre entier naturel non nul n, on note p_n la puissance électrique restant dans la ligne Xiangjiaba-Shanghai au bout d'une distance de n centaines de kilomètres. Ainsi p_1 est la puissance électrique restant dans la ligne au bout de 100 km.

1. Montrer que $p_1 = 0,997p_0$
2. Quelle est la puissance électrique au MW près par défaut restant dans la ligne Xiangjiaba-Shanghai au bout de 200 km ?
3. Déterminer la nature de la suite (p_n) puis exprimer p_n en fonction de n.

Partie B :
On considère l'algorithme ci-dessous :

Variables
  n : un nombre entier naturel
  q : un nombre réel
  p : un nombre réel
Entrée
  Saisir n
Initialisation
  Affecter à p la valeur 6 400
  Affecter à q la valeur 0,997
Traitement
  Répéter n fois
    Affecter à p la valeur $p \times q$
Sortie
  Afficher p

1. On entre dans l'algorithme la valeur $n = 3$.
   Faire fonctionner cet algorithme pour compléter les cases non grisées du tableau suivant, que l'on recopiera (on donnera des valeurs arrondies à l'unité près par défaut).

	n	q	p
Entrées et initialisation	3	0,997	6400
1^{er} passage dans la boucle de l'algorithme			
2^{e} passage dans la boucle de l'algorithme			
3^{e} passage dans la boucle de l'algorithme			

2. Interpréter la valeur de p obtenue au troisième passage dans la boucle de l'algorithme.
3. Quel est le pourcentage de perte de puissance électrique en ligne au bout de 300 km ?

Partie C :

1. Quelle est la puissance électrique à l'arrivée de la ligne Xiangjiaba-Shanghai ?
2. D'autres lignes électriques à très haute tension, en courant continu, sont en cours d'étude.
   On souhaite limiter la perte de puissance électrique à 7 % sur ces lignes.
   (a) La ligne Xiangjiaba-Shanghai répond-t-elle à cette contrainte ?
   (b) Déterminer, à cent kilomètres près, la longueur maximale d'une ligne à très haute tension en courant continu pour laquelle la perte de puissance reste infèrieure à 7 %.

Exercice 2 : *France Métropolitaine, 2014*

Au cours de son évolution, une tornade se déplace dans un corridor de quelques centaines de mètres de large sur quelques kilomètres de long.

Document 1 :

L'échelle de Fujita est une échelle servant à classer les tornades par ordre de gravité, en fonction des dégâts qu'elles occasionnent. Une partie de cette échelle est présentée dans le tableau ci- dessous.

Catégorie	**Vitesse des vents en km.h^{-1}**	**Dégâts occasionnés**
F0	60 à 120	**Dégâts légers :** dégâts sur cheminées, arbres, fenêtres,...
F1	120 à 180	**Dégâts modérés :** automobiles renversées, arbres déracinés,...
F2	180 à 250	**Dégâts importants :** toits arrachés, hangars et dépendances démolis,...
F3	250 à 330	**Dégâts considérables :** murs extérieurs et toits projetés, maisons et bâtiments de métal effondrés, forêts abattues,...
F4	330 à 420	**Dégâts dévastateurs :** murs effondrés, objets en acier ou en béton projetés comme des missiles,...
F5	420 à 510	**Dégâts incroyables :** maisons rasées ou projetées sur de grandes distances, murs extérieurs et toits arrachés sur de gros bâtiments,...

Document 2 :

À partir des mesures relevées lors d'observations de phénomènes semblables, des météorologues ont admis la règle suivante : la vitesse des vents dans les tornades diminue régulière- ment de 10 % toutes les 5 minutes.
On appelle ≪durée de vie≫ d'une tornade le temps nécessaire, depuis sa formation, pour que la vitesse des vents devienne inférieure à 120 km.h^{-1}.

Lors de la formation d'une tornade, on a mesuré la vitesse des vents par un radar météorologique et on a trouvé une vitesse initiale de 420 km.h^{-1}

L'objectif de ce problème est d'estimer la durée de vie de cette tornade.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10 km.h^{-1}.

1. (a) Cinq minutes après la mesure initiale la vitesse des vents est de 378 km.h−1.
   Vérifier que ce résultat correspond à la règle admise.
   À quelle catégorie appartient la tornade à ce moment là ?

   (b) Vérifier que, quinze minutes après la mesure initiale, cette tornade occasionne des dégâts classés comme ≪ dégâts considérables ≫.

2. Pour déterminer la durée de vie de cette tornade, un étudiant propose de modéliser le phénomène par une suite géométrique de raison q. Il commence à élaborer l'algorithme ci-dessous.

```
Variables
      n : un nombre entier naturel
      v : un nombre réel
      q : un nombre réel
Initialisation
      Affecter à n la valeur 0
      Affecter à v la valeur 420
      Affecter à q la valeur 0,9
Traitement
   Tant que ...........
      .......................
      .......................
Sortie
      Afficher 5 × n
```

   (a) Justifier lavaleur 0,9 dans la phrase ≪ Affecter à q la valeur 0,9 ≫.

   (b) Donner le premier terme et laraison de la suite géométrique proposée par l'étudiant.

   (c) Dans l'algorithme ci-dessus, des pointillés indiquent des parties manquantes.
   Recopier la partie relative au traitement et la compléter pour que l'étudiant puisse déterminer la durée de vie de cette tornade.

   (d) Expliquerl'instruction ≪ Afficher $5 \times n$ ≫ proposée par l'étudiant.

3. On désigne par (v_n) la suite géométrique proposée par l'étudiant.
   Exprimer v_n en fonction de n.

4. Déterminer la durée de vie de cette tornade au sens défini dans le document 2.

Exercice 3 : *France Métropolitaine, 2015*

Le parc de véhicules particuliers (VP) et de véhicules utilitaires légers (VUL) circulant en France est essentiellement constitué de véhicules thermiques (principalement essence, ga- soil et GPL).
Pour lutter contre la pollution, il intègre de plus en plus de véhicules à « faible émission de CO2 » c'est à dire des véhicules hybrides (véhicules thermiques assistés d'un moteur élec- trique) et des véhicules électriques.

Document 1

Au regard du parc et des ventes de véhicules en 2010, l'ADEME (Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie) a mobilisé ses services techniques et économiques en 2012, afin d'élaborer des visions énergétiques. Afin de répondre aux enjeux environnementaux, l'ADEME prévoit d'atteindre pour le parc 2030 un taux moyen d'émission de CO_2 par véhicule de 100 g/km.

Vente et prévisions

Véhicules (VP-VUL)	**Vente 2010**	**Parc 2010**	**Prévisions ventes 2030**	**Prévisions parc 2030**
Véhicules thermiques	100%	100%	64 %	89 %
Véhicules hybrides	0 %	0%	24 %	7 %
Véhicules électriques	0 %	0%	12 %	4 %
Total des voitures VP et VUL	2,2 millions	35 millions	2 millions	35 millions
Emission moyenne de CO2 par véhicule	127 g/km	165 g/km	49 g/km	100 g/km

Document 2

Ventes nationales de véhicules entre 2011 et 2013

Véhicules (VP-VUL)	**Ventes 2011**	**Ventes 2012**	**Ventes 2013**
Véhicules hybrides	13 600	27 730	41 340
Véhicules électriques	4313	9314	13 954
Total des ventes y compris véhicules thermiques	2 204 065	1 898 872	1 790 000

Partie A

1. Selon les prévisions de l'ADEME, quel serait en 2030 le nombre de véhicules hybrides vendus?

2. Selon les prévisions de l'ADEME, quel serait en 2030 le pourcentage de véhicules à faible émission de CO_2 dans le parc automobile?

Partie B

1. Le tableau suivant est incomplet. Déterminer le pourcentage d'augmentation des ventes de véhicules hybrides de 2012 à 2013.

Vehicules VP et VUL	Argumentation des ventes de véhicules	
	de 2011 à 2012	de 2012 à 2013
Véhicules hybrides	103,9%	...
Véhicules éléctriques	116%	49,8 %

2. Après un fort démarrage des ventes de véhicules hybrides, les professionnels de l'au- tomobile envisagent une augmentation de leurs ventes de 16 % par an de 2013 à 2030.
   Le nombre de véhicules hybrides vendus en 2013 est de 41 340.
   On décide de modéliser les ventes annuelles de véhicules hybrides par une suite géo- métrique de raison 1, 16.
   On note un le nombre de véhicules hybrides vendus durant l'année 2013 + n.

(a) Donner u_0.

(b) Exprimer u_n en fonction de n.

(c) L'augmentation de 16% par an des ventes de véhicules hybrides permettrait-elle d'atteindre la prévision de l'ADEME pour l'année 2030 ?

3. Les professionnels de l'automobile s'intéressent aussi aux ventes de véhicules élec- triques de 2013 à 2030.
   Le nombre de véhicules électriques vendus en 2013 est de 13 954.

   (a) On réalise sur tableur une feuille de calcul qui détermine le nombre de véhicules électriques vendus de 2013 à 2030 en supposant une augmentation annuelle de 16 % à partir de 2013.

	A	B
1	Année	Prévisions des ventes de voitures électriques
2	2013	13954
3	2014	16186,64
4	2015	18776,5024
5	2016	21780,74278
6	2017	25265,66163
7	2018	29308,16749
8	2019	33997,47429
9	2020	39437,07017
10	2021	45747,0014
11	2022	53066,52163
12	2023	61557,16509
13	2024	71406,3115
14	2025	82831,32134
15	2026	96084,33276
16	2027	111457,826
17	2028	129291,0782
18	2029	149977,6507
19	2030	173974,0748

   Donner la formule saisie dans la cellule B3 de la feuille de calcul ci-dessus pour compléter le tableau par ≪ recopie vers le bas ≫.

   (b) Ce taux d'augmentation annuel permettrait-il d'atteindre les prévisions de l'ADEME des ventes de véhicules électriques en 2030 ?

4. Les professionnels de l'automobile cherchent un pour centage d'augmentation annuelle des ventes de véhicules électriques qui permettrait d'atteindre les prévisions de l'ADEME en 2030.
   On considère l'algorithme suivant :

Variables
  u : un nombre réel
  q : un nombre réel
Initialisation
  Affecter à u la valeur 173 973
  Affecter à q la valeur 1,16
Traitement
  Tant que $u \leq 240000$
    q prend la valeur $q + 0,01$
    u prend la valeur $13954 \times q^{17}$
  Fin Tant que
Sortie
  Afficher $(q - 1) \times 100$

   (a) Que représente la valeur 173 974 prise par la variable u dans l'initialisation de l'algorithme ?

   (b) Faire fonctionner cet algorithme. Pour cela reproduire et compléter le tableau ci- dessous. Des lignes supplémentaires pourront être ajoutées.

Etapes de l'algorithme	Variables	
	q	u
Initialisation	1,16	173 974
Etape 1	...	...
Etape 2	...	...
...	...	...

(c) Quelle est la valeur affichée par l'algorithme? Interpréter le résultat.

Exercice 4 : *France Métropolitaine 2016*

Un centre de vacances possède une piscine de 600 m^3 soit 600 000 litres. L'eau du bassin contient du chlore qui joue le rôle de désinfectant. Toutefois le chlore se dégrade et 25% de celui-ci disparaît chaque jour, en particulier sous l'effet des ultra-violets et de l'évaporation. Le 31 mai à 9 h, le responsable analyse l'eau du bassin à l'aide d'un kit distribué par un magasin spécialisé.
Le taux de chlore disponible dans l'eau est alors de 1, 25 mg/L (milligrammes par litre).

Document

Réglementation de piscines publique

Paramètres contrôlés	**Seuils de qualité réglementaire**	**Incidences sur la qualité de l'eau**
Présence de Chlore	Au minimum 2 mg/L	$<$ 2 mg/L : sous chloration Risque de prolifération bactérienne dans l'eau
	Au maximum 4 mg/L	$>$ 4 mg/L : surchloration Irritation de la peau

Source : Agence Régionale de Santé

À partir du 1^{er} juin pour compenser la perte en chlore, la personne responsable de l'entre- tien ajoute, chaque matin à 9 h, 570 g de chlore dans la piscine.
Pour le bien-être et la sécurité des usagers, le reponsable souhaite savoir si cet apport journalier en chlore permettra de maintenir une eau qui respecte la réglementation donnée par l'Agence Régionale de Santé pour les piscines publiques.

Partie A

1. Pour tout entier naturel n on note u_n la quantité de chlore disponible, exprimée en grammes, présente dans l'eau du bassin le n^{ime} jour suivant le jour de l'analyse, immédiatement après l'ajout de chlore. Ainsi u_0 est la quantité de chlore le 31 mai à 9 h et u_1 est la quantité de chlore le 1^{er} juin à 9 h après l'ajout de chlore.

   (a) Montrer que la quantité de chlore, en grammes, présente dans l'eau du bassin le 31 mai à 9h est $u_0 = 750$.
   Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, le responsable pouvait-il donner l'accès à la piscine le 31 mai ?

   (b) Montrer que $u_1 = 1132, 5$.

   (c) Justifier que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = 0, 75u_n + 570$

   (d) La suite (u_n) est-elle géométrique?

2. Soit l'algorithme ci-dessous:

Variables
u : un nombre réel
N : un nombre entier naturel
k : un nombre entier naturel
Initialisation
Saisir la valeur de N
Initialisation
u prend la valeur 750
Traitement
Pour k allant de 1 à N
u prend la valeur $0,75u + 570$
Fin du Pour
Sortie
Afficher u

(a) Quel est le rôle de cet algorithme?

(b) Recopier et compléter le tableau suivant, par des valeurs exactes, en exécutant cet algorithme « pas à pas » pour $N = 3$:

Variables	Initialisation	Etape 1	Etape 2	Etape 3
u	750	1132,5		

Au regard des recommandations de l'agence régionale de santé, au bout de combien de jours la piscine peut-elle être ouverte ?

(c) Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de la quantité de chlore le 15^{ime} jour juste après l'ajout de chlore.

Partie B

Au fil du temps, la quantité de chlore évolue. On note dn l'écart de quantité de chlore d'un jour à l'autre en grammes. Pour tout entier naturel n,on a $d_n = u_{n+1} - u_n$.

1. (a) Calculer d_0, d_1 et d_2. On donnera une valeur exacte.
   (b) Justifier que d_0, d_1 et d_2 semblent être les termes d'une suite géométrique.
2. Vérifier que $u_{n+1} - u_n = -0,25u_n + 570$.
3. On admet que pour tout entier naturel n, on a $d_n + 1 = 0,75d_n$.
   (a) Justifier que $d_n = 382,5 \times 0,75^n$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a $u_n = 2280 - 1530 \times 0,75^n$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n). Interpréter le résultat trouvé.

Exercice 5 : *France Métropolitaine, 2017*

La climatisation d'un véhicule automobile est un système qui a une double fonction, refroidir ou réchauffer l'habitacle. Ce système fonctionne grâce à une certaine masse de gaz réfrigérant stocké dans un réservoir. On suppose que, par défaut d'étanchéité, le système perd naturellement 0,1 gramme de ce gaz chaque jour. Un automobiliste possède un véhicule pour lequel la masse de gaz dans le réservoir est initialement de 660 grammes.

Partie A
Le constructeur préconise de recharger le réservoir lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 grammes. Au bout de combien de jours le constructeur préconise-t-il à l'automobiliste de recharger ce réservoir?

Partie B
Lors d'une visite d'entretien, le garagiste signale à l'automobiliste que le système de climatisation de son véhicule présente une baisse significative de masse de gaz : en plus de la perte naturelle de 0, 1 gramme, le système perd 1% de sa masse de gaz chaque jour.
Le garagiste recharge alors complètement le réservoir.
Pour tout entier naturel n, on note un la masse de gaz dans le réservoir au bout de n jours après cette visite.
On a donc $u_0 = 660$ et on admet que pour tout entier naturel n,on a: $u_{n+1} = 0,99u_n - 0,1$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Voici un algorithme qui, lorsque l'on saisit un nombre N non nul de jours écoulés, calcule et affiche la masse de gaz restant dans le système.

Variables
N : un nombre entier naturel
k : un nombre entier naturel
u : un nombre réel
Entrée
Saisir N
Initialisation
u prend la valeur 660
Traitement
Pour k allant de 1 à ...
u prend la valeur ...
Fin Pour
Sortie
Afficher u

   (a) Recopier et compléter la partie relative au **traitement** de cet algorithme.
   (b) Quelle masse de gaz restera-t-il au bout de 20jours? Arrondir au gramme près.
3. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n + 10$.
   (a) Calculer v_0.
   (b) On admet que (v_n) est une suite géométrique de raison 0,99.
   Pour tout entier naturel n, exprimer vn en fonction de n.
   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n,on a: $u_n = 670 \times 0,99n - 10$.
   (d) À l'aide de cette expression, vérifier le résultat obtenu à la **question 2.b**.
4. On rappelle que le constructeur préconise de recharger le réservoir au plus tard lorsque la masse de gaz est inférieure à 440 g. Le coût d'une recharge est de 80 euros. Le garagiste propose de réparer le système pour 400 euros.
   Pourquoi est-il plus économique pour cet automobiliste de réparer le système ? Justifier la réponse.

Exercice 6 : *France Métropolitaine 2018*

Après son installation, un lundi matin, un aquarium contient 280 litres d'eau et des poissons. Par évaporation, le volume d'eau dans l'aquarium diminue de 2% par semaine. Compte tenu du nombre de poissons, cet aquarium doit contenir en permanence au minimum 240 litres d'eau.

Partie A

1. Quel volume d'eau restera-t-il dans l'aquarium au bout d'une semaine?

2. Est-il vrai qu'au bout de deux semaines, exactement 4% du volume d'eau initial se seront évaporés ? Justifier.

3. Déterminer au bout de combien de semaines le volume d'eau dans l'aquarium de viendra insuffisant.

Partie B

On ajoute chaque lundi matin, en une seule fois, 5 litres d'eau pour compenser l'évaporation hebdomadaire de 2%.
On note u_0 le volume initial d'eau en litres dans l'aquarium. Ainsi $u_0 = 280$
Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note u_n le volume d'eau dans l'aquarium, en litres, n semaines après son installation, immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau.

1. Vérifier que $u_2 = 278,812$.

2. Justifier que pour tout entier naturel n,$u_{n+1} = 0,98u_n + 5$.

3. Montrer que la suite (u_n) n'est pas géométrique.

4. On considère l'algorithme ci-dessous dans lequel k désigne un nombre entier naturel et U un nombre réel.

```
U ← 280
Pour k allant de 1 à ...
   U ←...
Fin Pour
```

   (a) Recopier et compléter l'algorithme pour qu'à la fin de son exécution, la variable U contienne u_6.

   (b) Quel est le volume d'eau dans l'aquarium, en litres à 10^{-2} près, 6 semaines après son installation immédiatement après l'ajout hebdomadaire des 5 litres d'eau.

5. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 250$. On admet que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,98.

   (a) Calculer v_0.

   (b) Exprimer v_n en fonction de n.

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel $n, u_n = 30 \times 0,98^n + 250$.

   (d) ustifier que la préconisation concernant le volume d'eau dans l'aquarium est respectée.

Exercice 2 : *France Métropolitaine, 2020*

Le conservatoire des espaces naturels d'une région s'occupe d'une zone protégée de 1 800 hec- tares. Depuis plusieurs années, il surveille le domaine d'extension d'une plante invasive. Cette plante inhabituelle, d'origine exotique, devient envahissante et cause une régression de la biodiversité. Si le conservatoire constate qu'à la fin d'une année l'aire de la surface oc- cupée par la plante dépasse 80 hectares, cette plante fera alors l'objet d'un plan d'élimination progressive à partir de l'année suivante.

1. Des relevés de la surface occupée par cette plante ont été effectués sur le terrain, enfin d'année, de 2015 à 2018 :

Année	2015	2016	2017	2018
Surface en hectares (ha)	63	66,2	69,5	73

Le conservatoire estime que l'aire de la surface occupée par cette plante a augmenté de 5% environ chaque année.
Vérifier que cette estimation est cohérente avec les relevés pris sur le terrain.

2. On considère qu'à partir de l'année 2018 la surface occupée par la plante augmente chaque année de 5%.
   Expliquer alors pourquoi la décision de commencer l'élimination de la plante devrait être prise à la fin de l'année 2020 par le conservatoire.

3. Lec onservatoire décide de mettre en œuvre un plan d'élimination progressive. Ce plan prévoit d'éliminer la plante, par arrachage ou par brûlage thermique, sur une surface de 10 hectares à chaque fin d'année, à partir de l'année 2021.
   Pour tout entier naturel n, on désigne par P_n l'aire de la surface occupée par la plante, exprimée en hectares, en fin d'année «$2020 + n$», en prenant $P_0 = 80,5$.

   (a) Montrer que $P_1 = 74,525$

   (b) Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $P_{n+1} = 1,05P_n - 10$.

   (c) Donner une valeur arrondie de P_2 à 10^{-3} près.

   (d) Pourquoi la suite (P_n) n'est-elle pas géométrique?

4. Le conservatoire décidera de mettre fin au plan d'élimination dès que l'aire de la surface occupée par la plante sera inférieure à 6 hectares. **Recopier** et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'à la fin de son exécution, la variable n contienne le nombre d'années de mise en œuvre du plan.

```
n ← 0
P ← 80,5
Tant que P ≥ 6
   P ← ...
   n ← ...
Fin Tant que
```

5. À la fin de quelle année le plan d'élimination prendra-t-il fin?