Baccalauréat STI2D : Probabilités discrètes et continues

Exercice 1 : *France Métropolitaine 2013*

Une fabrique de desserts dispose d'une chaîne automatisée pour remplir des pots de crème glacée . La masse en grammes de crème glacéee contenue dans chacun des pots peut être modéliséee par une variable aléeatoire X qui suit la loi normale d'espéerance 100 et d'écart type 0,43.

1. Afin de contrôler le remplissage des pots, le responsable qualitée souhaite disposer de certaines probabilités
Le tableau ci-dessous présente le calcul, effectuée à l'aide d'un tableur, des probabilités de quelques événements pour une loi normale d'espérance 100 et d'écart type 0,43.

a	$p(X \leq a)$
98	0,00000165
98,5	0,00024299
99	0,01002045

a	$p(X \leq a)$
99,5	0,12245722
100	0,50000000
100,5	0,87754278

a	$p(X \leq a)$
101	0,98997955
101,5	0,99975701
102	0,99999835

Les résultats seront donnés à 10^{-2} près.
Pour les calculs de probabilités, on utilisera éventuellement le tableau précédent ou la calculatrice.

(a) Déterminer la probabilité de l'événement $\ll X > 99 \gg$.

(b) Déterminer la probabilité de l'événement $\ll 99 \leq X \leq 101 \gg$.

(c) Le pot est jugé conforme lorsque la masse de crème glacée est comprise entre 99 grammes et 101 grammes.
Déterminer la probabilité pour qu'un pot prélevé aléatoirement soit non conforme.

2. Dans le cadre d'un fonctionnement correct de la chaîne de production, on admet que la proportion p de pots conformes dans la production est 98 %.

(a) L'intervalle de fluctuation asymptotique à 95 % de la fréquence des pots conformes sur un échantillon de taille n est

$$I = \left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}, p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right]$$

Déterminer les bornes de l'intervalle I pour un échantillon de taille 120.

(b) On contrôle régulièrement la chaîne de production en prélevant des échantillons de 120 pots de manière aléatoire. Au cours d'un de ces contrôles, un technicien compte 113 pots conformes.
En utilisant l'intervalle de fluctuation précédent, prendra-t-on la décision d'effectuer des réglages sur la chaîne de production ?

Exercice 2 : *France métropolitaine, 2014*

Une chocolaterie industrielle fabrique des tablettes de chocolat de 200 grammes. Une machine qui fabrique les tablettes est préréglée afin de respecter cette masse de 200 grammes.
Lors de la fabrication, toutes les tablettes de chocolat sont pesées et celles dont la masse est inférieure à 195 grammes sont rejetées. L'entreprise ne les commercialisera pas sous cette forme.

1. On désigne par X la variable aléatoire qui, à une tablette de chocolat prélevée au hasard dans la production, associe sa masse en grammes. On admet que X suit la loi normale d'espérance 200 et d'écart type 2,86.
   Les résultats seront arrondis à 10^{-4}
   (a) Déterminer la probabilité de l'évènement $195 \leq X \leq 99$.
   (b) Déterminer la probabilité qu'une tablette de chocolat prise au hasard dans la production ne soit pas rejetée après pesée.
2. Une étude statistique a établi que, si la machine est bien réglée, la proportion de tablettes de chocolat rejetées est de 4 %.
   Afin de vérifier le réglage de la machine, le responsable qualité prélève de manière aléatoire un échantillon de 150 tablettes et observe que 10 tablettes sont rejetées.
   Cette observation remet-elle en cause le réglage de la machine ? (On pourra utiliser un intervalle de fluctuation.)

Exercice 3 : *France Métropolitaine, 2015*

Dans l'ensemble de l'exercice, les résultats seront arrondis à 10^{-4} *près.*
L'usine OCEFRAIS embouteille des jus de fruits. L'étiquette de la bouteille indique 1,5 litre de jus de fruits. Le volume de la bouteille est de 1, 55 litre.
A l'embouteillage, le volume de jus de fruits versé dans une bouteille est une variable aléatoire X qui suit la loi normale de moyenne $\mu = 1,5$ et d'écart-type $\sigma = 0,015$.

1. (a) L'une des trois figures donne la courbe représentative C_f de la densité f de cette loi normale. Indiquer sur la copie le numéro de la figure correspondante en expliquant votre choix.

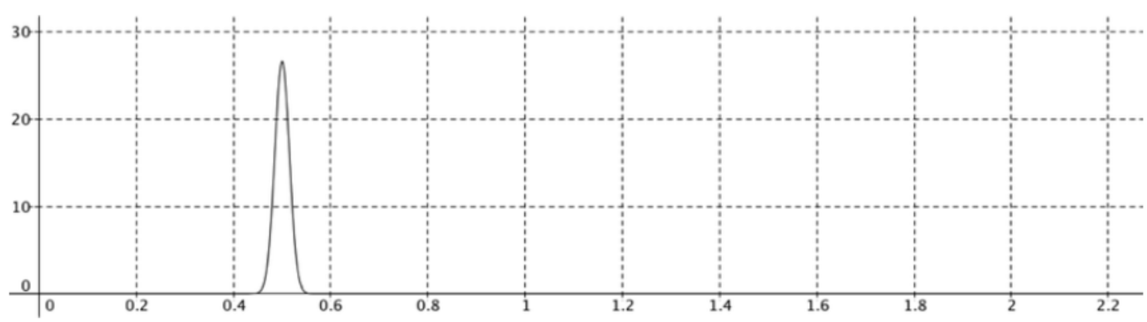


Figure 1

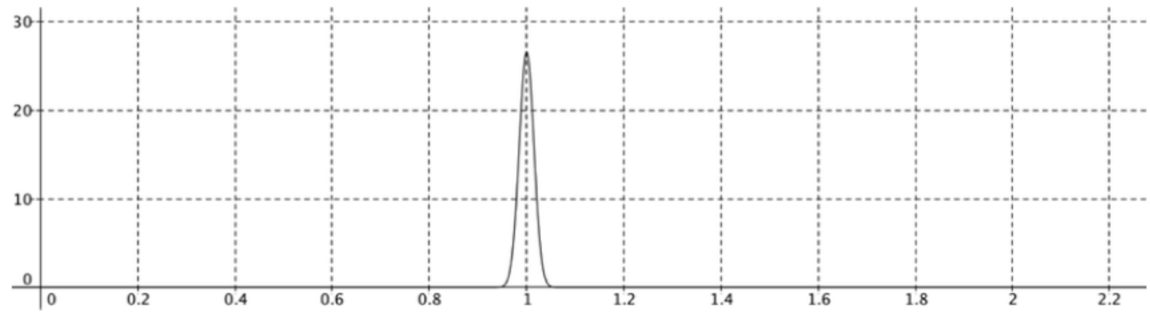


Figure 2

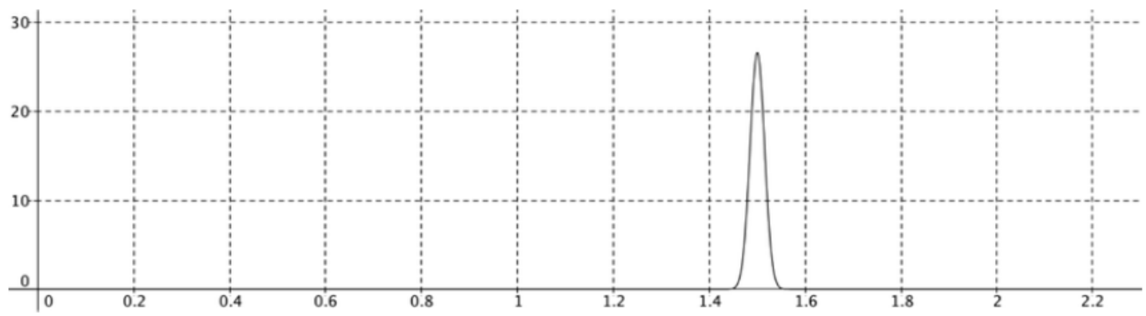


Figure 3

(b) Déterminer $P(1,485 \leq X \leq 1,515)$.

2. On choisit au hasard une bouteille de jus de fruits.

   (a) Quelle est la probabilité que cette bouteille contienne exactement 1,48 litre de jus de fruits ?

   (b) Calculer la probabilité que cette bouteille contienne entre 1,46 litre et 1,54 litre de jus de fruits.

   (c) Quelle est la probabilité que cette bouteille déborde sur la chaîne d'embouteillage?
   On rappelle que toutes les bouteilles utilisées ont un volume de 1, 55 litre.

3. Une bouteille est dite conforme si elle contient entre 1,46 litre et 1,54 litre de jus de fruits.
   Selon l'usine OCEFRAIS, la probabilité qu'une bouteille soit non conforme est 0, 0077.
   Un supermarché achète un lot de 10 000 bouteilles.

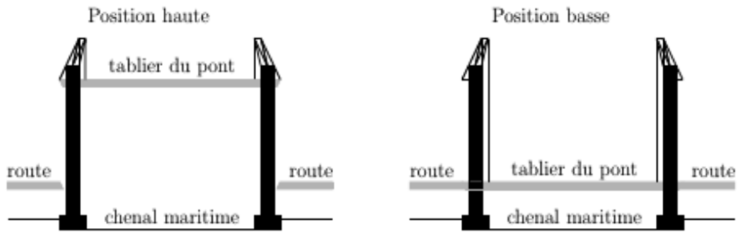
   (a) Déterminer l'intervalle de fluctuation asymptotique à 95% de la fréquence ob- servée de bouteilles non conformes dans un tel lot.

   (b) Dans le lot de 10 000 bouteilles, on a compté 90 bouteilles non conformes. Le gérant du supermarché trouve le nombre de bouteilles non conformes anorma- lement élevé.
   L'usine OCEFRAIS a-t-elle des raisons de s'inquiéter ?

Exercice 4 : *France Métropolitaine 2016*

Les parties A et B sont indépendantes.

Un pont levant enjambant un canal peu fréquenté est constitué d'un tablier qui, une fois relevé, permet le passage de bateaux de différentes tailles.



Hauteur du tablier en position haute : 7 mètres
Longueur du tablier : 30 mètres
Temps de montée du tablier : 2 minutes
Temps en position haute du tablier (hors incident) : 8 minutes
Temps de descente du tablier : 2 minutes

Partie A - Sur la route

Un automobiliste se présente devant le pont. Le tablier du pont est en position haute. On s'in- téresse ici au temps d'attente D, exprimé en minutes, de l'automobiliste avant qu'il puisse franchir le canal, pont baissé (hors incident).

1. Combien de temps l'automobiliste attend-il au minimum? au maximum?
2. On admet que le temps d'attente, en minutes, de l'automobiliste pour franchir le pont est une variable aléatoire D qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[2; 10]$.
   Déterminer l'espérance $E(D)$ de la variable aléatoire D et interpréter le résultat dans le contexte.
3. Calculer la probabilité que le temps d'attente de l'automobiliste ne dépasse pas 5 minutes.

Partie B - Sur l'eau
Dans cette partie les résultats demandés seront arrondis à 10^{-2} près.
Lorsqu'un bateau est passé, le tablier du pont revient en position basse. Le temps, exprimé en heures, avant que le bateau suivant se présente devant le pont est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$. Ce temps est appelé temps de latence.

1. Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T et interpréter le résultat dans le contexte.
2. On considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = 0,05e^{-0,05x}$.
   (a) Montrer que la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par $F(x) = -e^{0,05x}$ est une primitive de f.
   (b) On rappelle que pour tout nombre réel t de $[0, +\infty[$, $P(T \leq t) = \int_0^t f(x)\mathrm{d}x$.
   Démontrer que $P(T \leq t) = 1 - e^{-0,05t}$.
3. (a) Calculer la probabilité que le temps de latence soit inférieur à une demi-journée, soit 12 heures.
   (b) Calculer la probabilité que le temps de la tence soit supérieur à un jour.
   (c) Calculer $P(12 \leq T \leq 24)$.

Exercice 5 : *France métropolitaine, 2017*

Un chef cuisinier décide d'ajouter un $\ll$ menu terroir $\gg$ à la carte de son restaurant. S'appuyant sur sa longue expérience, le restaurateur pense qu'environ 30% des clients choisiront ce menu. Ceci le conduit à faire l'hypothèse que la probabilité qu'un client, pris au hasard, commande le « menu terroir » est $p = 0,3$.

Partie A

Afin de tester la validité de son hypothèse, le restaurateur choisit au hasard 100 clients et observe que 26 d'entre eux ont commandé un « menu terroir ».
Après discussion avec son comptable, le restaurateur décide d'accepter l'hypothèse que $p = 0,3$.
À l'aide d'un intervalle de fluctuation asymptotique à 95%, justifier cette décision.

Partie B

Une agence de voyage a réservé toutes les tables du restaurant pour la semaine à venir. Le restaurateur sait ainsi que 1 000 clients viendront déjeuner chacun une fois durant la semaine. Le nombre de « menus terroir » qui seront alors commandés est une variable aléatoire X .
On considère que la probabilité qu'un des clients commande un $\ll$ menu terroir $\gg$ est $p = 0,3$.

1. On admet que la variable aléatoire X suit une loi binomiale.
   (a) Donner ses paramètres.
   (b) Déterminer la probabilité que le nombre de « menus terroir » commandés soit inférieur ou égal à 315.
2. On décide d'approcher la loi binomiale précédente par la loi normale d'espérance $\mu = 300$ et d'écart type $\sigma = 14{,}49$.
   Justifier les valeurs de μ et σ.

   Dans la suite de l'exercice, on utilisera cette approximation par la loi normale. Les résultats seront arrondis à 10^{-2} près.
3. (a) Estimer $P(285 \leq X \leq 315)$.
   (b) Estimer $P(X \geq 350)$ et interpréter le résultat obtenu.

Exercice 6 : *France métropolitaine, 2018*

Un industriel commercialise des portes blindées. Il projette de lancer un nouveau modèle de portes blindées : les portes « SECUR ». Équipées d'un digicode et d'une caméra, elles seront donc plus sécurisées que celles déjà existantes sur le marché.
Les résultats seront arrondis à 10^{-4} près.

Partie A

Avant de débuter son projet, l'industriel s'intéresse à une étude portant sur le prix de vente des portes blindées classiques existantes.
Le prix de vente, en euros, d'une porte blindée classique est une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 3\,000$ et d'écart type $\sigma = 750$.

1. Déterminer la probabilité $P(1500 \leq X \leq 4500)$.
2. Déterminer la probabilité qu'une porte blindée classique coûte plus de 2500 euros.
3. (a) Recopier et compléter le tableau suivant où a désigne un nombre entier naturel.

a	$P(X \leq a)$
3950	0,8974
3960	
3970	

   (b) Déterminer le montant minimal, à l'euro près, tel qu'au moins 90% des portes blindées classiques aient un prix de vente inférieur à ce montant.

(c) L'industriel estime que le prix de vente du modèle de porte blindée équipée « SECUR » ne devra pas dépasser de plus de 15% le montant minimal précédent.
Quel prix de vente maximal M , à l'euro près, peut-il envisager pour une porte du modèle « SECUR »?

Partie B

L'industriel envisage de commercialiser les portes blindées de modèle « SECUR » au tarif M déterminé précédemment. Il souhaite estimer la proportion de personnes susceptibles d'acheter son nouveau modèle. Une enquête est réalisée sur un échantillon de 984 personnes intéressées par l'achat d'une porte blindée. Sur cet échantillon, 123 personnes se disent favorables à l'achat du modèle « SECUR ».

1. Déterminer l'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, de la proportionde personnes favorables à l'achat du nouveau modèle.

> *On rappelle que pour une fréquence f observée dans un échantillon de taille n, l'inter- valle de confiance au niveau de confiance 95% de la proportion p du caractère étudié dans la population est donné par :*
> $$\left[f-1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\,;f+1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

2. Pour que l'industriel prenne le risque d'investir dans les portes « SECUR », il faudrait qu'au minimum 20% des personnes souhaitant s'équiper d'une porte blindée soient favorables à ce nouveau modèle. A-t-il intérêt à réaliser son projet ?

Exercice 6 : *France métropolitaine, 2019*

Dans cet exercice, les résultats sont à arrondir à 10^{-3} près.

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A
Les téléphones portables intègrent des capteurs photographiques de plus en plus évolués. Ces capteurs sont fragiles et ont une durée de vie limitée.
La durée de fonctionnement sans panne, exprimée en années, d'un capteur photographique est modélisée par une variable aléatoire D qui suit la loi normale de paramètres $\mu = 4$ et $\sigma = 1{,}23$.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique ?
2. Déterminer la probabilité $P(3,5 \leq D \leq 4,5)$.
3. Lors de l'achat d'un téléphone portable, la garantie pièces et main d'œuvre est de deux ans. Quelle est la probabilité que la durée de fonctionnement sans panne d'un capteur photographique soit inférieure à la durée de garantie ?

Partie B

Lorsqu'un téléphone portable devient défectueux et qu'il est encore sous garantie, le client peut le déposer dans un point de vente agréé pour réparation ou échange contre un appareil neuf.
On s'intéresse au temps d'attente, exprimé en jours, avant le retour de l'appareil, réparé ou échangé. Ce temps peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit la loi exponen- tielle de paramètre $\lambda = 0,025$.

1. (a) Déterminer l'espérance $E(T)$ de la variable aléatoire T.
   (b) Interpréter cette valeur dans le contexte.
2. Un téléphone portable, défectueux et encore sous garantie, a été déposé par un client dans un point de vente agréé.

(a) Calculer la probabilité $P(T \leq 7)$ et interpréter ce résultat.

(b) Calculer la probabilité que le client doive attendre plus de 20 jours avant de récupérer son téléphone portable.

Partie C

Un magazine spécialisé souhaite comparer l'efficacité des services après-vente (S.A.V.) pour les téléphones portables de deux marques A et B. Après une enquête auprès de clients, le magazine obtient les résultats suivants :

Marque de téléphone	Nombre de clients du S.A.V. ayant répondu à l'enquête	Nombre de clients indiquant avoir récupérer leur téléphone en moins de 20 jours.
A	120	47
B	92	26

1. On admet que l'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, de la propor- tion de clients ayant récupéré en moins de 20 jours leur téléphone de marque A est $[0,304; 0,480]$.
   Déterminer l'intervalle de confiance, au niveau de confiance 95%, de la proportion de clients ayant récupéré en moins de 20 jours leur téléphone de marque B.

2. Au vu des deux intervalles de confiance obtenus, le magazine peut-il indiquer à ses lecteurs qu'il y a une différence significative dans l'efficacité des deux S.A.V.? Justifier la réponse.