Baccalauréat STI2D : Étude de fonctions

Exercice 1 : *France métropolitaine 2013*

On éteint le chauffage dans une pièce d'habitation à 22 h. La température y est alors de 20^{o}C.
Le but de ce problème est d'étudier l'évolution de la température de cette pièce, puis de calculer l'énergie dissipée à l'extérieur, au cours de la nuit, de 22 h à 7 h le lendemain matin.
On suppose, pour la suite du problème, que la température extérieure est constante et égale à 11^{o}C.
On désigne par t le temps écoulé depuis 22 h, exprimé en heures, et par $f(t)$ la température de la pièce exprimée en ^{o}C. La température de la pièce est donc modélisée par une fonction f définie sur l'intervalle $[0,9]$.

Partie A :

1. Prévoir le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,9]$.

   On admet désormais que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0,9]$ par $f(t) = 9e^{-0,12t} + 11$.

2. Donner une justification mathèmatique du sens de variation trouvé à la question précédente
3. Calculer $f(9)$. En donner la valeur arrondie au dixième puis interpréter ce résultat.
4. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, l'heure à partir de laquelle la température est inférieure à 15^{o}C
5. Retrouver le résultat précédent en résolvant une inéquation.

Partie B :
Le flux d'énergie dissipée vers l'extérieur, exprimé en kilowatts (kW), est donné par la fonction g telle que, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0,9]$,

$$g(t) = 0,7e^{-0,12t}.$$

L'énergie ϵ ainsi dissipée entre 22 h et 7 h, exprimée en kilowattheures (kWh), s'obtient en calculant l'intégrale

$$\epsilon = \int_0^9 g(t)dt$$

1. Calculer la valeur exacte de l'énergie dissipée.
2. En déduire une valeur arrondie de ϵ à 0,1 kWh près.

Exercice 2 : *France métropolitaine 2014*

Dans cet exercice, la température est exprimée en degrés Celsius (^{o}C) et le temps t est exprimé en heures.
Une entreprise congèle des ailerons de poulet dans un tunnel de congélation avant de les conditionner en sachets. À l'instant $t = 0$, les ailerons, à une température de 5 ^{o}C, sont placés dans le tunnel. Pour pouvoir respecter la chaîne du froid, le cahier des charges impose que les ailerons aient une température inférieure ou égale à -24 ^{o}C.

Partie A
La température des ailerons dans le tunnel de congélation est modélisée en fonction du tempst parlafonction f définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par $f(t) = 35e^{-1,6t} - 30$.

1. Déterminer la température atteinte par les ailerons au bout de 30minutes, soit 0,5h.

2. Étudier le sens de variation de la fonction f.

3. Si les ailerons de poulet sont laissés une heure et demie dans le tunnel de congélation, la température des ailerons sera-t-elle conforme au cahier des charges ?

4. Résoudre par le calcul l'équation $f(t) = -24$ et interpréter le résultat trouvé.

Partie B
Pour moderniser son matériel, l'entreprise a investi dans un nouveau tunnel de congélation. La température des ailerons dans ce nouveau tunnel est modélisée, en fonction du temps, par une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$, qui est solution de l'équation différentielle $y' + 1,5y = -52,5$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 1,5y = -52,5$

2. (a) Justifier que $g(0) = 5$.
   (b) Vérifier que la fonction g est définie par $g(t) = 40e^{-1,5t} - 35$.

3. Ce nouveau tunnel permet-il une congélation plus rapide?

Exercice 3 : *France métropolitaine, 2015*

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis à 10^-2 *près.*

Une fibre optique est un fil très fin, en verre ou en plastique, qui a la propriété d'être un conducteur de la lumière et sert dans la transmission d'un signal véhiculant des données.
La puissance du signal, exprimée en milliwatts (mW), s'atténue au cours de la propagation. On note P_E et P_S les puissances respectives du signal à l'entrée et à la sortie d'une fibre. Pour une fibre de longueur L exprimée en kilomètres (km), la relation liant P_E , P_S et L est donnée par : $P_S = P_E \times e-^{aL}$ où a est le coefficient d'atténuation linéaire dépendant de la fibre.
Une entreprise utilise deux types de fibre optique de coefficients d'atténuation différents. Dans tout l'exercice :

- la puissance du signal à l'entrée de la fibre est 7 mW ;
- à la sortie, un signal est détectable si sa puissance est d'au moins 0,08 mW ;
- pour rester détectable, un signal doit être amplifié dès que sa puissance devient strictement inférieure à 0,08 mW.

Partie A
Le premier type de fibre de longueur 100 km utilisé par l'entreprise a un coefficient d'atté- nuation linéaire $a = 0,046$. Pour ce type de fibre, sera-t-il nécessaire de placer au moins un amplificateur sur la ligne pour que le signal soit détectable en sortie ?

Partie B
La puissance du signal le long du second type de fibre est modélisée par une fonction g de la variable x, où x étant la distance en kilomètres parcourue par le signal depuis l'entrée de la fibre. On admet que cette fonction g est définie et dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$ et qu'elle est solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y' + 0,035y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle $y' + 0,035y = 0$.
2. (a) Sachant que $g(0) = 7$, vérifier que la fonction g est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $g(x) = 7e^{-0,035x}$.
   (b) En déduire le coefficient d'atténuation de cette fibre.
3. (a) Étudier le sens de variation de la fonction g.
   (b) Déteminer la limite de la fonction g en $+\infty$.
4. (a) Le signal sera-t-il encore détecté au bout de 100km de propagation?
   (b) Déterminer la longeur maximale de la fibre permettant une détection du signal à la sortie sans amplification.

Exercice 4 : *France métropolitaine, 2016*

Quand l'oreille humaine est soumise à une intensité acoustique, exprimée en watts par mètre carré (W/m^2), le niveau sonore du bruit responsable de cette intensité acoustique est ex- primé en décibels (dB).

Document 1

Au regard du parc et des ventes de véhicules en 2010, l'ADEME (Agence de l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie) a mobilisé ses services techniques et économiques en 2012, afin d'élaborer des visions énergétiques. Afin de répondre aux enjeux environnementaux, l'ADEME prévoit d'atteindre pour le parc 2030 un taux moyen d'émission de CO_2 par véhicule de 100 g/km.

Echelle de bruit

Sources sonores	Intensité acoustique (W/m^2)	Niveau sonore (dB) arrondi éventuellement à l'unité	Sensation auditive
Décollage de la Fusée Ariane	10^6	180	Exige une protection spéciale
Turboréacteur	10^2	140	
Course de Formule 1	1O	130	
Avion au décollage	1	120	Seuil de douleur
Concert et discothèque	10^{-1}	110	Très difficilement supportable
Baladeur à puissance maximum	10^{-2}	100	
Moto	10^{-5}	70	Pénible à entendre
Voiture au ralenti	10^{-7}	50	Vruit courant
Seuil d'audibilité	10^{-12}	0,08	Silence anormal

1. D'après le tableau, lorsque l'intensité acoustique est multipliée par 10, quelle semble être l'augmentation du niveau sonore ?
2. La relation liant l'intensité acoustique x où x appartient à l'intervalle $[10^{-12}; 10^6]$ et le niveau sonore est donnée par :

$$f(x) = \frac{10}{ln(10)} \times ln(x) + 120.$$

On pourra prendre $\dfrac{10}{ln(10)} \simeq 4,34$.

(a) Vérifier la conjecture émise à la question 1.

(b) Quel serait le niveau sonore de deux motos?

3. Pour éviter tout risque sur la santé, le port d'un casque de protection acoustique est donc conseillé au delà de 85 dB.
   Déterminer l'intensité acoustique à partir de laquelle le port d'un tel casque est conseillé.

Exercice 5 : *France métropolitaine, 2017*

La fonte GS (graphite sphéroïdal) possède des caractéristiques mécaniques élevées et pro- ches de celles des aciers. Une entreprise fabrique des pièces de fonte GS qui sont utilisées dans l'industrie automobile.

Ces pièces sont coulées dans des moules de sable et ont une température de 1 400^{o}C à la sor- tie du four. Elles sont entreposées dans un local dont la température ambiante est maintenue à une température de 30^{o}C. Ces pièces peuvent être démoulées dès lors que leur tempéra- ture est inférieure à 650 ^{o}C.

La température en degrés Celsius d'une pièce de fonte est une fonction du temps t, exprimé en heures, depuis sa sortie du four. On admet que cette fonction f , définie et déri- vable sur l'intervalle $[0; +\infty[$, est une solution sur cet intervalle de l'équation différentielle $y' + 0,065y = 1,95$.

1. (a) Résoudre sur $[0; +\infty[$ l'équation différentielle $y' + 0,065y = 1,95$.
   (b) Donner $f(0)$ et vérifier que la fonction f est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(t) = 1370e{-}0,065t+ 30$.
2. (a) Étudier mathématiquement le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
   (b) Pour quoi ce résultat était-il prévisible?
3. La pièce de fonte peut-elle être démoulée après avoir été entreposée 5 heures dans le local ?
4. (a) Déterminer au bout de combien de temps au minimum la pièce pourra être dé- moulée. Arrondir le résultat à la minute près.
   (b) Pour éviter la fragilisation de la fonte, il est préférable de ne pas démouler la pièce avant que sa température ait atteint 325^{o}C.
   Dans ce cas, faudra-t-il attendre exactement deux fois plus de temps que pour un démoulage à 650^{o}C ? Justifier la réponse.

Exercice 6 : *France Métropolitaine 2018*

Le niveau sonore N d'un bruit, à une distance D de sa source, dépend de la puissance sonore P de la source. Il est donné par la relation

$$N = 120 + 4ln\left(\frac{P}{13 \times D^2}\right)$$

où N est exprimé en décibels (dB), P en Watts (W) et D en mètres (m).

Partie A

*Les questions **1.** et **2.** sont indépendantes.*

1. Calculer le niveau sonore N d'un bruit entendu à 10 mètres de la source sonore dont la puissance P est égale à 2,6 Watts. *On arrondira le résultat à l'unité.*
2. On donne $N = 84$ dB et $D = 10$ m. Déterminer P . On arrondira le résultat à $10{-}2$ près.

Partie B

Une entreprise de travaux publics réalise un parking en plein air. Sur le chantier d'aménage- ment de ce parking, une machine de découpe a une puissance sonore P égale à 0,026 Watts.

1. (a) Montrer qu'à une distance D de la machine, le niveau sonore N dû à celle-ci vérifie la relation :

$$N = 120 + 4ln(0,002) - 4ln(D^2)$$

   (b) Montrer qu'une approximation de N peut être 95,14-8ln(D).

Dans la suite de l'exercice, à une distance de x mètres de la machine, le niveau sonore N émis par la machine est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0,1;20]$ par :

f (x)=95,14-8ln(x)

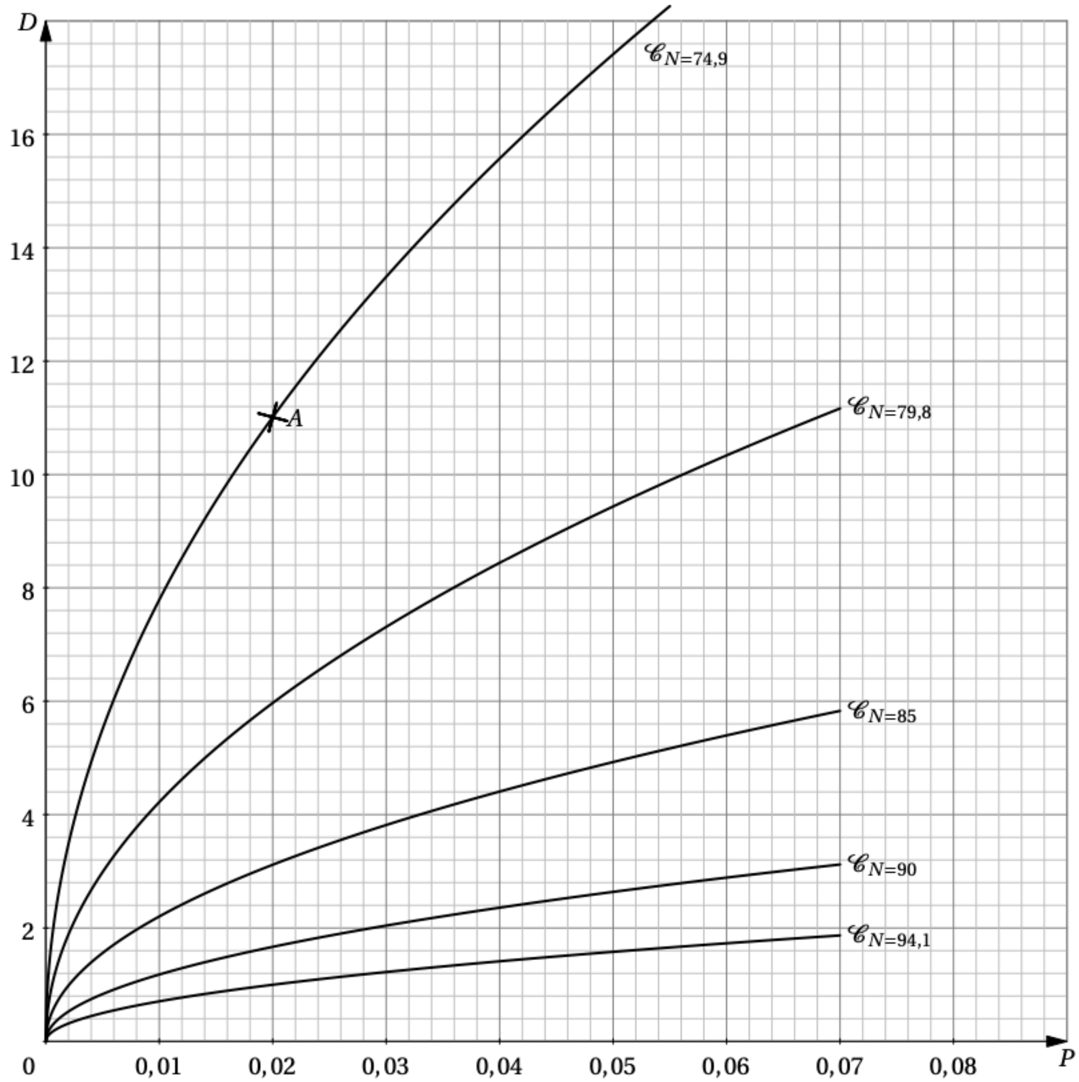
2. (a) Déterminer une expression de $f'(x)$, où f' désigne la fonction dérivée de f .
   (b) Donner le signe de $f'(x)$ pour tout x de l'intervalle $[0,1;20]$.
   (c) En déduire le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0,1;20]$.
3. On suppose qu'un ouvrier de cette entreprise se situe à troismètres de la machine.
   La législation en vigueur l'oblige à porter des protections individuelles contre le bruit dès qu'un risque apparaît.
   Justifier, à l'aide du tableau ci-dessous, que l'ouvrier doit porter des protections individuelles contre le bruit.

Impacts sur l'audition	**Niveaux sonores en décibels**
Aucun	$[0;85[$
Risque faible	$[85;90[$
Risque élevé	$[90;120[$

4. Déterminer à quelle distance de la machine un ouvrier de l'entreprise sort de la zone de risque élevé (c'est-à-dire lorsque le niveau sonore est inférieur à 90 dB).

Partie C

On s'intéresse au lien entre la puissance P d'un bruit et la distance D de sa source pour différentes valeurs de son niveau sonore N .



On admet que pour une puissance de 0,02 Watt, le niveau sonore du bruit est de 74,9 décibels à une distance de 11 mètres de la source sonore. Ainsi, le point A de coordonnées $(0,02;11)$ appartient à la courbe $\mathcal{C}_N = 74,9$.

1. Pour un bruit de puissance P égale à 0,06 W, déterminer graphiquement à quelles dis- tances minimale et maximale de la source peut se situer une personne pour que le niveau sonore N soit compris entre 85 et 90 dB.
2. Pour une source sonore située à une distance D de 8 m, déterminer graphiquement les puissances minimale et maximale de cette source pour obtenir un niveau sonore compris entre 74,9 dB et 79,8 dB.

Exercice 7 : *France métropolitaine 2019*

Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.

Le conservatoire des espaces naturels d'une région s'occupe d'une zone protégée de 1 800 hec- tares. Depuis plusieurs années, il surveille le domaine d'extension d'une plante invasive. Cette plante inhabituelle, d'origine exotique, devient envahissante et cause une régression de la biodiversité. Si le conservatoire constate qu'à la fin d'une année l'aire de la surface oc- cupée par la plante dépasse 80 hectares, cette plante fera alors l'objet d'un plan d'élimination progressive à partir de l'année suivante.

Partie A

1. Des relevés de la surface occupée par cette plante ont été effectués sur le terrain, enfin d'année, de 2015 à 2018 :

Année	2015	2016	2017	2018
Surface en hectares (ha)	63	66,2	69,5	73

   Le conservatoire estime que l'aire de la surface occupée par cette plante a augmenté de 5% environ chaque année.
   Vérifier que cette estimation est cohérente avec les relevés pris sur le terrain.

2. On considère qu'à partir de l'année 2018 la surface occupée par la plante augmente chaque année de 5%.
   Expliquer alors pourquoi la décision de commencer l'élimination de la plante devrait être prise à la fin de l'année 2020 par le conservatoire.

3. Lec onservatoire décide de mettre en œuvre un plan d'élimination progressive. Ce plan prévoit d'éliminer la plante, par arrachage ou par brûlage thermique, sur une surface de 10 hectares à chaque fin d'année, à partir de l'année 2021.
   Pour tout entier naturel n, on désigne par P_n l'aire de la surface occupée par la plante, exprimée en hectares, en fin d'année «$2020 + n$», en prenant $P_0 = 80,5$.
   (a) Montrer que $P_1 = 74,525$
   (b) Justifier que pour tout entier naturel n, on a : $P_{n+1} = 1,05P_n - 10$.
   (c) Donner une valeur arrondie de P_2 à 10^{-3} près.
   (d) Pourquoi la suite (P_n) n'est-elle pas géométrique?

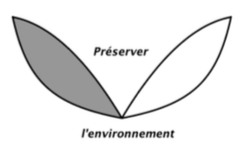
4. Le conservatoire décidera de mettre fin au plan d'élimination dès que l'aire de la surface occupée par la plante sera inférieure à 6 hectares. **Recopier** et compléter l'algorithme ci-contre pour qu'à la fin de son exécution, la variable n contienne le nombre d'années de mise en œuvre du plan.

```
n ← 0
P ← 80,5
Tant que P ≥ 6
   P ← ...
   n ← ...
Fin Tant que
```

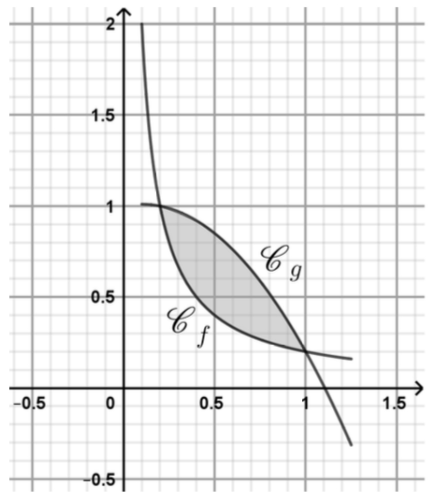
5. À la fin de quelle année le plan d'élimination prendra-t-il fin?

Partie B

Le logo utilisé par le conservatoire pour la communication est constitué de deux feuilles symétriques l'une de l'autre, dessinées ci-contre.



Soient les fonctions f et g définies sur l'intervalle $[0,1;1,25]$ par $f(x) = \frac{0,2}{x}$ et $g(x) = -x^2 + 0,2x + 1$.
On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives de ces fonctions tracées dans le repère ortho- normé ci-dessous.
On admet que ces deux courbes $\mathcal{C}f$ et $\mathcal{C}g$ se coupent en deux points.



La feuille gauche du logo correspond à la partie grisée du plan, délimitée par ces deux courbes.

1. Vérifier par le calcul que 0,2 est une solution de l'équation $f(x) = g(x)$.
2. Déterminer graphiquement la seconde solution de cette équation.
3. (a) Interpréter graphiquement l'intégrale $I = \int_{0,2}^{1} g(x)dx$
   (b) Donner une valeur approchée de cette intégrale à 10−2 près.
4. (a) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $[0,1;1,25]$ par $F(x) = \frac{1}{5}ln(x)$ est une primitive sur l'intervalle $[0,1;1,25]$ de la fonction f .
   (b) Calculer la valeur exacte de $J = \int_{0,2}^{1} f(x)dx$.
5. On admet que la courbe $\mathcal{C}_g$ est située au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0,2;1]$.
   L'unité choisie sur chacun des axes est de 2,5 cm.
   En déduire, au cm^2 près, une valeur approchée de l'aire totale du logo.

Exercice 8 : *France métropolitaine 2019*

Le clinker est un constituant du ciment qui résulte de la cuisson d'un mélange composé de calcaire et d'argile. La fabrication du clinker nécessite des fours à très haute température qui libèrent dans l'air une grande quantité de dioxyde de carbone (CO_2).
Dans une cimenterie, la fabrication du clinker s'effectue de 7h30 à 20h, dans une pièce de volume 900000dm^3 .
À 20h, après une journée de travail, le taux volumique de CO_2 dans la pièce est de $0,6\%$.

1. Justifier que le volume de CO2 présent dans cette pièce à 20h est de 5 400 dm^3
2. Pour diminuer ce taux de CO_2 durant la nuit, l'entreprise a installé dans la pièce une colonne de ventilation. Le volume de CO_2, exprimé en dm3, est alors modélisé par une fonction du temps t écoulé après 20h, exprimé en minutes. t varie ainsi dans l'intervalle $[0;690]$ puisqu'il y a 690 minutes entre 20h et 7h30. On admet que cette fonc- tion V , définie et dérivable sur l'intervalle $[0;690]$ est une solution, sur cet intervalle, de l'équation différentielle $(E) : y' + 0,01y = 4,5$.
   (a) Déterminer la solution générale de l'équation différentielle (E).
   (b) Vérifier que pour tout réel t de l'intervalle $[0;690]$,$V(t) = 4950e{-}0,01t + 450$.
3. Quel sera, au dm^3 près, le volume de CO_2 dans cette pièce à 21h ?
   Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier la réponse.
4. Déterminer l'heure à partir de laquelle le volume de CO_2 dans la pièce deviendra inférieur à 900dm^3 .