Calcul littéral et calcul numérique

1. Devenir pote avec la racine carrée

Exercice 1 :

Effectuer les calculs suivants.

$\sqrt{4}$; $\sqrt{(-6)^2}$; $\sqrt{11}^2$; $\sqrt{5^4}$

Exercice 2 :

Déterminer les valeurs exactes des nombres suivants

$\sqrt{7^2+3^2}$; $\sqrt{169 \times 144}$; $\sqrt{169}-\sqrt{144}$

$\sqrt{169-144}$

Exercice 3 :

Sans utiliser la calculatrice, déterminer, si elle existe, la racine carrée des nombres suivants.

64 ; 1296 ; $\sqrt{81}$; $(-7)^2$

Exercice 4 :

Sans utiliser la calculatrice, déterminer, si elle existe, la racine carrée des nombres suivants.

256 ; -16 ; $\sqrt{256}$; $(-2)^2$

Exercice 5 :

Écrire sous la forme $\sqrt{a}$ avec $a > 0$.

$\sqrt{7} \times \sqrt{6}$; $\sqrt{15} \div \sqrt{5}$; $\sqrt{16}+\sqrt{9}$; $4\sqrt{3}$

Exercice 6 :

Écrire sous la forme $\sqrt{a}$ avec $a > 0$.

$2\sqrt{3}$; $3\sqrt{2}$; $5\sqrt{7}$; $6\sqrt{2}$

Exercice 7 :

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des nombres entiers strictement positifs, b étant le plus petit possible. .

$\sqrt{50}$; $\sqrt{200}$; $\sqrt{147}$; $\sqrt{54}$

Exercice 8 :

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b avec la valeur de b donnée.

1. $\sqrt{50}+\sqrt{8}+\sqrt{18}$ avec $b = 2$.
2. $\sqrt{75}+\sqrt{48}+\sqrt{12}$ avec $b = 3$.
3. $\sqrt{27}-\sqrt{12}+\sqrt{300}$ avec $b = 3$.
4. $\sqrt{175}+\sqrt{63}+\sqrt{28}$ en déterminant b.

Exercice 9 :

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ où a et b sont des entiers naturels non nuls les plus petits possible.

$\sqrt{80}+5\sqrt{45}$; $2\sqrt{72}-3\sqrt{50}$

2. Les fractions ? Même pas peur.

Exercice 10 :

Ecrire les expressions suivantes sous forme simplifiée.

1. $\dfrac{2}{3}+\dfrac{7}{15}$
2. $\dfrac{13}{30}-\dfrac{7}{15}+\dfrac{5}{3}$
3. $\dfrac{-2}{9}-\dfrac{-8}{15}$
4. $\dfrac{2}{11}+2$

Exercice 11 :

Sans calculatrice, écrire les expressions suivantes sous forme simplifiée.

1. $\frac{7}{12} - \frac{5}{6} \times \frac{1}{2}$
2. $\frac{7}{4} \div 2 - \frac{1}{6} \times \frac{2}{-3}$
3. $\frac{7}{12} \div \left(\frac{5}{6} + \frac{1}{2}\right)$
4. $\left(\frac{3}{5}\right)^2 - \frac{-5}{6}$

Exercice 12 :

Sans utiliser de calculatrice, déterminer la forme simplifiée des nombres suivants.

1. $\frac{2}{3}\left(2 + \frac{3}{4}\right)$
2. $\frac{2}{3} \times 2 + \frac{3}{4}$
3. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}$
4. $\frac{1}{2} \div \frac{1}{3} \div \frac{1}{4} \div \frac{1}{5}$

Exercice 13 :

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\dfrac{\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}} = \dfrac{1-n}{1+n}$

Exercice 14 :

Montrer que pour tout entier naturel $n \neq 0$, $\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)}$.

Exercice 15 :

Soient a, b, c et d quatre nombres réels non nuls tels que $ad + bc \neq 0$.

Montrer que $\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) \times \frac{bd}{ad+bc} = 1$

3. Les joies de la puissance

Exercice 16 :

Calculer sans la calculatrice, en justifiant son résultat, les puissances suivantes :

$2^3 \quad ; \quad 0^{14} \quad ; \quad (-2)^3 \quad ; \quad (-1)^{10} \quad ; \quad (-1)^{13}$

Exercice 17 :

Transformer l'écriture en une seule puissance en utilisant la règle «produit de deux puissances»:

$3^2 \times 3^8 \quad ; \quad 4 \times 4^2 \quad ; \quad (-9)^3 \times (-9)^2 \times (-9)$

Exercice 18 :

Transformer l'écriture en une seule puissance en utilisant la règle «puissance d'une puissance»:

$\left[(-3)^2\right]^2 \quad ; \quad \left[(-2)^3\right]^2 \quad ; \quad \left[(-5)^3\right]^2 \quad ; \quad \left[(7)^5\right]^2$

Exercice 19 :

Transformer l'écriture en une seule puissance en utilisant la règle «puissance d'une puissance»:

$\frac{3^5}{3^2} \quad ; \quad \frac{(-5)^4}{(-5)^2} \quad ; \quad \frac{(-4)^2}{(-4)^4}$

Exercice 20 :

Simplifier puis calculer les expressions suivantes:

$A = (7^{-24} \times 7^{-26} \times 7^{51})^2$
$B = (5^{-4} \times 5^5)^3$
$C = (2 \times 3)^2 \times 3^{-3} \times 2 \times 2 - 4 \times 3^{-1}$
$D = \frac{2^5 \times 3^8}{3^5 \times 2^3}$
$E = \frac{5^{12} \times 10^{-3} \times 3^8}{10^{-5} \times 3^8 \times 5^{10}}$
$F = 8 \times (7 \times 5)^5 \times \frac{5^2 \times 7^3}{7^4 \times 5^5} \times (7^{-2})^2$

4. Développement et factorisation d'identités remarquables

Exercice 21 :

Choisir pour chaque expression sa forme développée.

1. $(x+7)^2$
2. $(x+\sqrt{7})^2$
3. $(x-7)(x+7)$
4. $(x^2-7)(x^2+7)$
5. $(x-7)^2$

Exercice 22 :

À l'aide de l'identité remarquable donnée, développer les expressions algébriques suivantes.

1. $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$
   (a) $(x+3)^2$
   (b) $(2x+8)^2$
   (c) $(4+3x)^2$
   (d) $\left(\frac{1}{3}+x\right)^2, x \in \mathbb{R}$
2. $(a+b)^2 = a^2-2ab+b^2$
   (a) $(x-9)^2$
   (b) $(3x-4)^2$
   (c) $(2-5x)^2$
   (d) $(2-5x)^2, x \in \mathbb{R}$
3. $(a+b)(a-b) = a^2+b^2$
   (a) $(x+14)(x-14)$
   (b) $(7x+9)(9-7x)$
   (c) $\left(\frac{2}{3}+\frac{x}{4}\right)\left(\frac{2}{3}-\frac{x}{4}\right)$
   (d) $\left(x\frac{7}{4}\right)\left(x-\frac{35}{20}\right), x \in \mathbb{R}$

Exercice 23 :

À l'aide de l'identité remarquable donnée, factoriser les expressions algébriques suivantes.

1. $a^2+2ab+b^2 = (a+b)^2$
   (a) $x^2+10x+25$
   (b) $9x^2+6x+1$
   (c) $2y+1+y^2$
   (d) $4x^2+20x+25$
2. $a^2-2ab+b^2 = (a-b)^2$
   (a) $x^2-8x+16$
   (b) $9x^2-6x+1$
   (c) $z^2-z+\frac{1}{4}$
   (d) $25+25x^2-50x$
3. $a^2+b^2 = (a+b)(a-b)$
   (a) a^2-144
   (b) $9x^2-16$
   (c) $\frac{x^2}{4}-\frac{4}{9}$
   (d) x^2-7

Exercice 24 :

À l'aide de l'identité remarquable la plus adaptée, factoriser, pour tout nombre réel x, les expressions algébriques suivantes.

1. $x^2+14x+49$
2. $9x^2-30x+25$
3. $x^2-\frac{16}{81}$
4. $16x^2-4900$
5. $6,25+x^2-5x$
6. $x^2+\sqrt{2}x+\frac{1}{2}$

Exercice 25 :

Soit a un nombre réel. On considère l'équation d'inconnue x : $(x+3)^2 = (x+a)(x-a)+6a$

1. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $(x+a)(x-a)+6a = x^2+6a-a^2$
2. Montrer que l'équation se ramène à $6x+9 = 6a-a^2$
3. En déduire que $6x = -(a-3)^2$
4. En déduire x en fonction de a.

Exercice 26 :

Pour tous réels x et y, montrer les identités suivantes.

1. $\frac{1}{2}\left((x+y)^2+(x-y)^2\right) = x^2+y^2$
2. $\frac{1}{4}\left((x+y)^2-(x-y)^2\right) = xy$

Exercice 27 :

Soient x, y et m trois réels. Factoriser les expressions littérales suivantes.

1. $x(x-2)+(x-1)x$
2. $2x(x+y)+4x(y^2+1)$
3. $(7-m)(m+1)-(7-m)(3m-1))$

4. $(2x+3)^2 - (2x+3)(x-5)$
5. $(7y+3)^2 - 25$

Exercice 28 :

Soient x, k et a des nombres réels. À l'aide d'une ou de plusieurs identités remarquables, développer les expressions algébriques suivantes.

1. $((7-3k)(7+3k))^2$
2. $\left(x - \frac{2}{3}\right)\left(x + \frac{2}{3}\right)\left(x^2 + \frac{4}{9}\right)$
3. $(18-10a)(9+5a)$

Exercice 29 :

On considère l'expression suivante définie pour tout réel x : $B(x) = (4x+5)^2 - (4x+5)(7-x)$.

1. Pour tout nombre réel x, développer et réduire $B(x)$.
2. Pour tout nombre réel x, factoriser $B(x)$ à l'aide d'un facteur commun.
3. En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de $20x^2 + 17x - 10 = 0$.

5. Résolution d'équations et d'inéquations

Exercice 30 :

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $3x+7=0$.
2. $6-x=4$.
3. $3(x+7)=9$
4. $x-8=0$

Exercice 31 :

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $3x+7=x-1$.
2. $6-x=x+14$.
3. $3(x+7)=4x+9$
4. $2(x-4)=7x-2$

Exercice 32 :

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $(x+3)(x-7)=0$.
2. $(2x-3)(x+6)=0$.
3. $x(x+1)=0$
4. $x^3-x=0$

Exercice 33 :

On considère l'expression $A(x) = \dfrac{2x+3}{x+7}$ définie pour tout $x \neq -7$.

1. Résoudre $A(x)=0$.
2. Résoudre $A(x)=3$.
3. Résoudre $A(x)=-2$

Exercice 34 :

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $2x+1>3$.
2. $3x-2 \leq 7$.
3. $-5x + \frac{1}{2} \geq 3$.
4. $2-x<5$
5. $5(x+11) > -6$
6. $\dfrac{-9x+1}{5} > 11$
7. $2-x<5$
8. $2-4x \leq 3$
9. $x\sqrt{2}-1>1$

Exercice 35 :

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $7x+3>2x-5$.
2. $5x-3 \leq 8x-6$.
3. $7(x+1)>5-2x$.
4. $-5x+3 \geq 2(x-5)$

Exercice 36 :

On considère un nombre réel a et l'inéquation $ax+5<7$ dans laquelle l'inconnue est x. Résoudre cette inéquation dans $\mathbb{R}$ en fonction du signe de a.

Exercice 37 :

Soit m, un nombre réel strictement positif. On considère l'inéquation suivante dans laquelle l'inconnue est le nombre réel x : $mx+2 \geq m$.

1. Résoudre dans R cette inéquation en fonction de m.
2. À quel intervalle doit appartenir m pour que 2 soit solution de l'inéquation ?

3. Reprendre les questions précédentes avec $m < 0$.

Exercice 38 :

Soit x un nombre entier naturel. On considère la fraction $\frac{7x+3}{15}$.
Pour quelles valeurs de x cette fraction est-elle supérieure ou égale à $\frac{2}{5}$?

Exercice 39 :

Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $(x+3)^2 = x(x-2)$.
2. $\frac{2}{5}x + 8 = \frac{1}{3}(x-7)$.

Exercice 40 :

Soit k un nombre réel. On considère l'équation suivante dans laquelle l'inconnue est le réel x : $k^2x + 7 = x - 2k$.

1. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$ en fonction de k.

2. Pour quelles valeurs de k n'existe-t-il pas de solution ?

3. À quel plus petit ensemble de nombres appartient k lorsque 0 est une solution de l'équation ?

