Chapitre 2 : Suites (I)

1 Débuter avec les formes récurrentes et explicites

Exercice 1 :

1. Pour chacune des suites ci-dessous, calculer les six premiers termes, puis représenter le nuage de points correspondant.
   (a) Pour tout nombre entier naturel $n \geq 2, u_n = \dfrac{0,5n+3}{n-1}$.
   (b) Pour tout nombre entier naturel $n, v_n = 1,5^n - 2$.
   (c) Pour tout nombre entier naturel $n, w_n = n^2 - n$.
   (d) Pour tout nombre entier naturel $n, t_n = 1 + 2 \times (-1)^n$.
2. Pour chacune des suites précédentes, exprimer le terme d'indice $n+1$ en fonction de n.

Exercice 38 :

On considère la succession de figures suivantes.

Figure 1 **Figure 2** **Figure 3**

On note b_n le nombre de bâtons nécessaires à la construction de la figure n où $n \in \mathbb{N}^*$.

1. (a) Donner les veleurs de b_1,b_2 et b_3.
   (b) Tracer la figure 4 et donner la valeur de b_4.
   (c) Conjecturer une formule explicite de la suite (b_n).
2. En supposant exacte la conjecture émise à la question **1c**, déterminer :
   (a) La valeur de b_20;
   (b) quelle est la plus grande figure que l'on puisse contruire avec 200 bâtons.

Exercice 2 :

On dispose de l'algorithme suivant.

$$U \leftarrow 5N + 3$$
$$U \leftarrow U - 2^N$$

1. Quelle est la valeur de la variable U à la fin de l'algorithme pour $N = 0$? pour $N = 1$? pour $N = 2$? pour $N = 3$?
2. L'algorithme calcule un terme d'une suite (u_n), définie sur $\mathbb{N}$. Donner une formule explicite de (u_n).
3. Calculer la valeur du 8e terme.

Exercice 3 :

Pour chacune des suites ci-dessous, déterminer les cinq premiers termes.

1. $u_0 = 2$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - 5$
2. $v_1 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = v_n^2 - 2^n$
3. $w_0 = -1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, w_{n+1} = (1-w_n)(1+0,5w_n) + 3$.

Aide On note u_n^2 pour $(u_n)^2$

Exercice 4 :

Pour chaque premier terme a_0, déterminer les cinq premiers termes de la suite (a_n) définie par la relation de réccurence : $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \dfrac{1-a_n}{1+a_n}$

1. $a_0 = 0$
2. $a_0 = 4$
3. $a_0 = -5$
4. $a_0 = 0,2$

2 Étudier les variations d'une suite :

2.1 Avec la méthode de la différence

À l'aide d'une différence de termes, déterminer les vatiations de la suite (U_n).

Exercice 5 :

$u_n = -5n + 9$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 :

$u_n = n^2 - 8n + 16$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7 :

$u_n = 3(n - 0,5)^2$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8 :

$u_n = 4^{n+1} - 4^n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 :

$u_n = n^3 + 3n - 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10 :

$u_n = (2 - n)^3$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 11 :

$u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n - 19n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 12 :

$u_0 = \dfrac{2}{3}$ et $u_{n+1} = 3n^2 + u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13 :

$u_1 = 6,11$ et $u_{n+1} = u_n - \dfrac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

2.2 Avec la méthode du quotient

À l'aide d'un quotient de termes, déterminer les variations de la suite (u_n), supposée strictement positive.

Exercice 14 :

$u_n = \dfrac{1}{n^2 - 1}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

Exercice 15 :

$u_n = \dfrac{4^{n+2}}{3^n}$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 16 :

$u_0 = 32$ et $u_{n+1} = 0,24u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 :

$u_1 = \dfrac{2}{9}$ et $u_{n+1} = 3n \times u_n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 18 :

$u_2 = 17$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{n}u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$.

Exercice 19 :

$u_2 = \pi$ et $u_{n+1} = (1 + n^2)u_n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 :

On considère la suite (u_n) telle que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = \dfrac{7^n}{n+1}$.

1. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} > 1$.
3. Conclure sur la monotonue de (u_n).

2.3 Avec une étude de fonction :

À l'aide d'une fonction, déterminer les variations de la suite (u_n).

Exercice 21 :

$u_n = 3n - 0,5$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 22 :

$u_n = 7 - 2,8n$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 23 :

$u_n = 2\pi + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 24 :

$u_n = n^2 + 1$ avec $n \in \mathbb{N}$.

3 Problèmes :

Exercice 25 :

Pour calculer un terme de la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$, on utilise la fonction en Python ci-dessous.

```
def V(n):
    t=4
    for k in range(n):
        t=2*t-5
    return t
```

1. Quelle est la valeur de v_0?
2. Proposer une forme récurrente de la suite (v_n).
3. Déterminer la valeur de v_3.

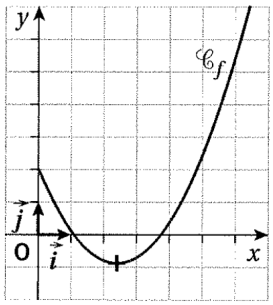
Exercice 26 :

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{(1+u_n)^2}$.

1. Réduger un algorithme qui calcule le terme d'indice 10 de la suite (u_n).
2. Modifier l'algorithme afin qu'il calcule le terme d'indice p, où $p \in \mathbb{N}^*$, de la suite (u_n).

Exercice 27 :

On considère la suite (u_n) telle que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n = 0,5(n-2,4)^2 - 0,88$.



1. On donne ci-contre une présentation graphique de f, de sommet le point d'abscisse 2,4.
   Dresser le tableau de variation de la fonction f.
2. Calculer u_2 et u_3.
3. En déduire les variations de la suite (u_n).

Exercice 28 :

1. La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \begin{cases} -n+6 \ si \ n \leq 4 \\ \sqrt{n} \ si \ n \geq 5 \end{cases}$$

   (a) Calculer les huit premiers terme de la suite (u_n).

   (b) Conjecturer les sens de variation de la suite (u_n).

2. (a) Quelle est la fonction f définie sur $[5;+\infty[$ telle que, pour tout nombre entier $n \geq 5, u_n = f(n)$?

   (b) À l'aide des variations de f, confirmer ou infirmer la cojecture faite à la question **1b**.

3. Que peut-on dire de u_n quand n devient grand?

Exercice 29 :

On considère la suite (u_n) telle que, pour tout nombre entier naturel $n, u_n n + 1 = \dfrac{2u_n}{2 + {u_n}^3}$.
On admet que, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

1. **Calculer** | Vérifier que, pour tout nombre entier naturel $n, u_{n+1} - u_n = \dfrac{-{u_n}^4}{2 + {u_n}^3}$.
2. En déduire la monotonie de (u_n).